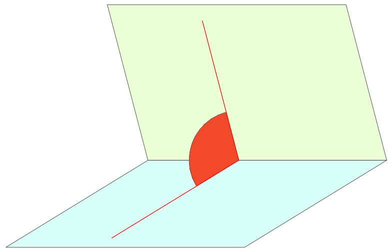
TRIEDROS

ÁNGULO DIEDRO

Es la porción de espacio limitada por dos semiplanos que se llaman caras. La arista del diedro es la recta común a las dos caras.

El valor de un ángulo diedro es la amplitud del menor ángulo posible que conforman dos semirrectas pertenecientes una a cada semiplano y que se obtienen trazando un plano auxiliar perpendicular a la recta común (arista), siendo la apertura de las semirrectas intersección la medida del ángulo diedro.



ÁNGULO TRIEDRO

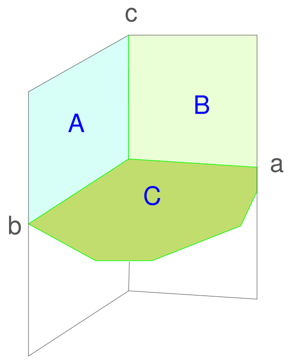
Un ángulo triedro es la intersección de tres diedros cuyas aristas concurren en un punto común al que llamaremos vértice del triedro.

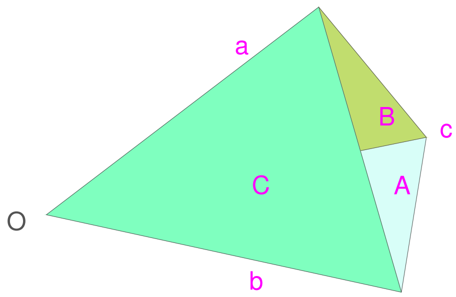
TRIEDRO
Si a un ángulo diedro lo cortamos por un plano cualquiera no paralelo a ninguna de las caras del diedro ocurre que a parecen tres aristas a,b,c y tres semiplanos delimitados, cada uno, por dos aristas que llamaremos caras A,B,C. Teniendo en cuenta que las aristas a y b pertenecen al plano C, estas dos rectas se cortarán en un punto O. Este punto O por ser dela arista b pertenece a los planos A,,C. Por ser de la arista a es de los planos B,C.

Luego O es un punto que está en los tres planos lo que significa que la arista c pasa por el punto O que llamaremos vértice del triedro
Cada cara define un ángulo que es el que forman sus aristas cuando son consideradas como rectas de un mismo plano.

Cada arista define un diedro y su ángulo se mide a partir de dos semirrectas perpendiculares a la arista en un mismo punto de la misma y contenidas una en cada semiplano.

(También se puede medir, es lo mismo, a partir de un plano auxiliar y perpendicular a la arista que deja dos trazas al interseccionar con los planos del diedro definido por la arista ,una en cada semiplano y coincidentes en un punto dela arista).



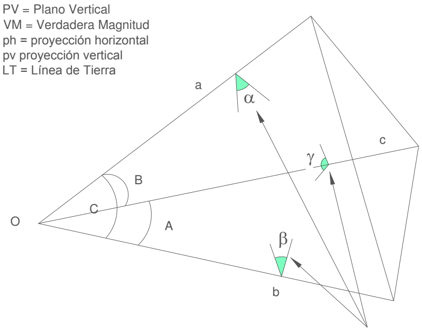


NOMENCLATURA

Las aristas se nombran con minúsculas y las caras con mayúsculas de modo que una cara está delimitada por las aristas de nombre distinto al de la cara o también, es lo mismo, una cara se nombra con la letra de la arista que no está contenida en la cara.

Al valor del ángulo diedro lo representaremos por letras griegas α β γ
Al valor de la cara lo representaremos por la letra de la cara y así en lugar de escribir cara A escribimos A.

PH = Plano Horizontal
PV = Plano Vertical
VM = Verdadera Magnitud
ph = proyección horizontal
pv proyección vertical
LT = Línea de Tierra



Estos ángulos son diedros por lo que se miden sobre un planos auxiliares perpendiculares a cada arista

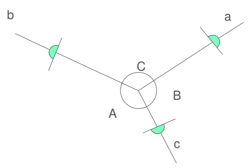
ELEMENTOS QUE DEFINEN UN TRIEDRO Y CASOS QUE SE PRESENTAN

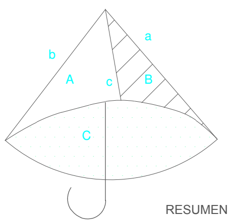
Hemos visto que un triedro viene definido por seis elementos: tres diedros y tres caras
Para resolver un triedro sólo hace falta conocer tres de ellos por lo que los posibles casos que se nos pueden presentar son:

DATOS			COMENTARIO	INCÓGNITAS		
A	B	C	Conocemos los ángulos de las tres caras	α	β	γ
A	B	γ	Dadas dos caras y el diedro que forman	C	α	β
A	B	α	Dadas dos caras y uno de los diedros no común	C	β	γ
A	β	γ	Una cara y los diedros que se forman con la cara	B	C	α
A	α	β	Una cara, y los diedros de otra cara	B	C	γ
α	β	γ	Nos dan los tres diedros	A	B	C

EXISTENCIA DEL ÁNGULO TRIEDRO

Pensemos en un paraguas de tres varillas al cual abrimos normalmente o lo abrimos hasta convertir la tela en un plano, este será uno de los casos límite de la existencia de un triedro, o podemos cerrar el paraguas que nos dará la imagen de otra posición límite para la existencia del triedro.



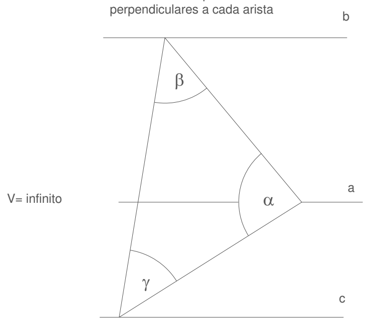


PARAGUAS ABIERTO

En este caso cada diedro mide 180 luego en el caso límite la suma de los tres diedros será de $\alpha + \beta + \gamma$ = 180° x3 = 540°
.
Para los ángulos de las caras será de A + B + C = 360°

RESUMEN DE LAS CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE UN ÁNGULO DIEDRO

$180° \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 540°$
$0 \leq A + B + C \leq 360$
Por otro lado una cara ha de ser
menor que la suma de las otras dos
mayor que su diferencia.



PARAGUAS CERRADO
En este caso la imagen de paraguas cerrado requiere ciertos retoques. Las aristas van acercándose unas a otras lo que significa que van a ser, en el límite, paralelas y esto significa que si han de permanecer distintas porque en el triedro siempre tenemos tres aristas, lo que ocurre es que se convierten en tres rectas paralelas para lo que hemos de romper el paraguas y entonces el vértice se va al infinito, las suma de los ángulos de las caras, que al ir cerrando el paraguas veíamos que se iban acercando a cero, será de cero y otra vez el triedro se hace un plano lo que ahora los diedros forman un triángulo por lo que en esta posición mínimo y límite tendremos $\alpha + \beta + \gamma$ = 180° y A + B + C = 0°

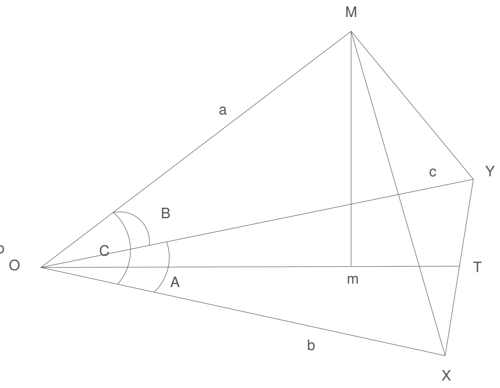
CASO A, B, C

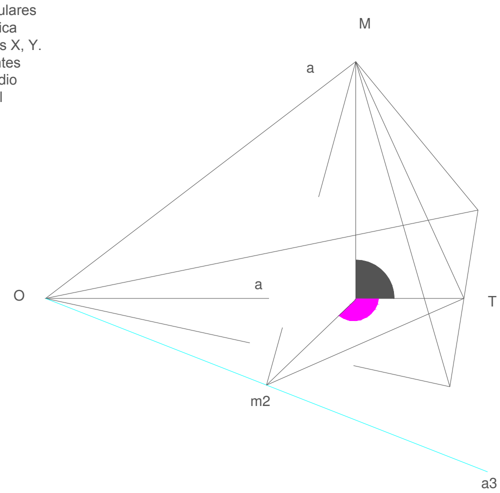
En cada caso vamos a realizar primero una explicación de lo que vamos a realizar y en qué se basa y que llamaremos DESARROLLO para luego pasar a su resolución en diédrico y que llamaremos PROCEDIMIENTO.

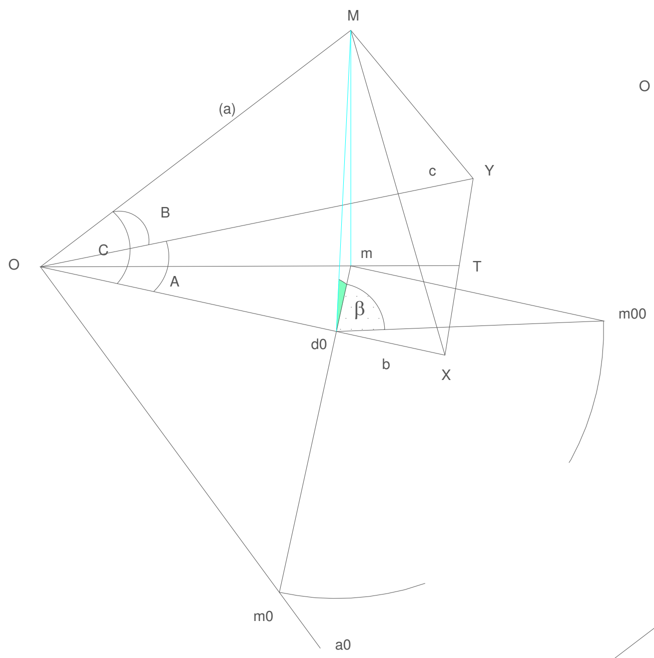
DESARROLLO

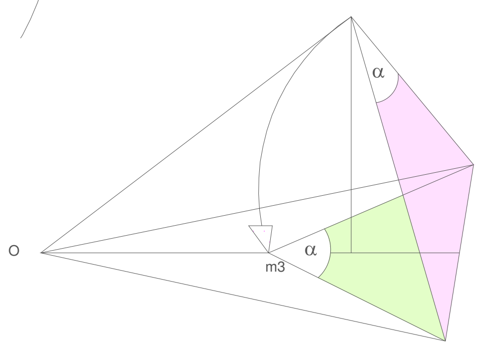
Tenemos un triedro que nos vamos a imaginar que está resuelto y del que conocemos el valor de las tres caras.
Si ponemos una cualquiera de las caras, elegimos la A, sobrePH y abatimos la arista a del espacio con b como charnela tendremos en VM el valor de la cara C, luego si a la derecha de la arista b construimos el ángulo dela cara B que nos lo dan como dato, tendremos la arista a0 que es la abatida de a con b como charnela. Análogamente si abatimos a con c como charnela tendremos la cara B en VM luego a la izqda de c construimos el dato de la cara B lo que nos dará la arista a1 abatida de a con c como charnela.

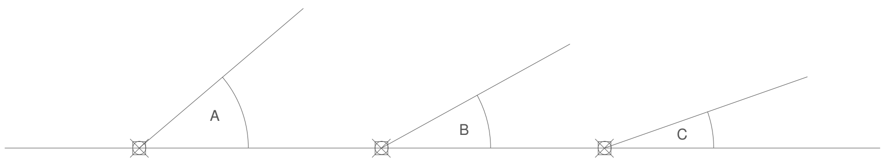
Supongamos, ahora, que hemos elegido un punto M sobre a, el segmento OM del espacio aparecerá en VM al abatir la arista, luego sobre la arista a0 aparecerá m0 y sobre a1 aparecerá m1 de modo que por estar en VM ha de ser Om0 = Om1.
Por ello sobre a0 elegimos un punto cualquiera m0 con centro en O y radio m0 marcamos sobre a1 el punto m1 que será el abatido de M con la otra arista como charnela.
Recordando el abatimiento, lo que se hacía es trazar desde la ph del punto abatido, que todavía no tenemos posicionada, se trazaba una perpendicular a la charnela que prolongando pasa por el punto abatido.
Luego si desde m0 trazamos una perpendicular a su charnela b y desde m1 una perpendicular a la suya, c, ambas perpendiculares han de pasar por un punto común que nos da la proyección horizontal m del punto M.
Sean d0 y d1 los puntos de corte con las charnelas
Uniendo Om tendremos la proyección horizontal a de la arista
Por otro lado y deshaciendo el abatimiento de, por ejemplo m0, tenemos el triángulo m, d0, m00 abatido del triángulo en el espacio M, m, d0 con charnela md0 y lo digo porque el triángulo abatido nos da dos informaciones, una la cota del punto M que es el valor m' del cateto paralelo y otra el valor del diedro de arista b y ello es así porque al ser md0 $\perp$ b es la proyección horizontal de la hipotenusa Md0 que por una proyección perpendicular a b será una línea de máxima pendiente de la cara C y el ángulo de esta línea con el plano horizontal será el ángulo que forma la cara C con el PH y como la cara A está en PH se trata del ángulo que forma la cara A con la cara C, es decir, el diedro β (el valor del diedro de la arista b).
Fijarse que es el ángulo que se forma entre la hipotenusa y el cateto que no es paralelo a la arista.
Procediendo dela misma manera con m1 tendremos Υ .
Ya tenemos conocidos dos diedros.
Para el tercero lo que hacemos es cortar el triedro por un plano auxiliar y perpendicular a la arista a del espacio lo que me dará como trazas al cortar a las caras, las rectas MX y MY. Si abatimos el triángulo MXY con charnela XY tendremos en VM el valor del diedro α ya que las rectas MX y MY son perpendiculares a la arista a y están contenidas una en cada cara del triedro, luego miden el ángulo.
Pero abatir el triángulo es abatir el punto M en un punto m3 y luego unirlo con X y con Y.
Veamos la manera de obtener XY. Dada la ph de la arista a esta cortará en un punto T a la traza XY (recordemos para más adelante que T es un punto de XY y también lo es de la ph de a) y observando que MT es perpendicular a la arista a por estar en un plano perpendicular a la arista.
En el abatimiento la perpendicularidad se conserva, luego si abatimos M con a como charnela obtenemos m2 .
Uniendo Om2 tenemos a3 que es la arista a espacial abatida con a su proyección horizontal como charnela.
De modo que m2T es perpendicular a la proyección a3, por tanto, si tenemos M y tenemos a hacemos el abatimiento de M con a como charnela y tenemos Om2=a3, como a=OM $\perp$ MT , en el abatimiento a3 = Om2 $\perp$ m2t . Por ello y desde m2 trazamos una perpendicular a a3 y en el corte con a tendremos T.
Ahora un poco de razonamiento: la arista a es perpendicular al plano MXY, luego sus trazas serán perpendiculares a las trazas del plano => a (proyección horizontal de a) será perpendicular a la traza XY del plano. Esto significa que por T trazamos una perpendicular a la proyección a y donde corte a las aristas b y c tendremos los puntos X, Y. Sabemos que tanto m2, como T están sobre a y que en el abatimiento de MXY aparecerá MT en VM, pero antes hemos abatido M con a como charnela y tenemos m2T en VM, luego lo que hacemos es con centro en T y radio m2T, trazar sobre a el punto m3 abatido de M con XY como charnela. Ahora unimos m2X y m2Y y tenemos el diedro α

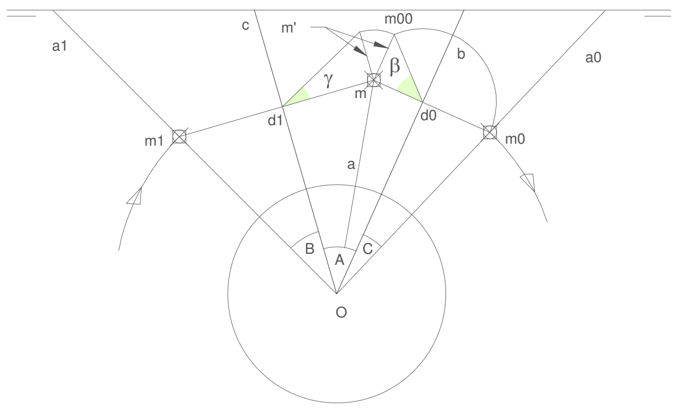












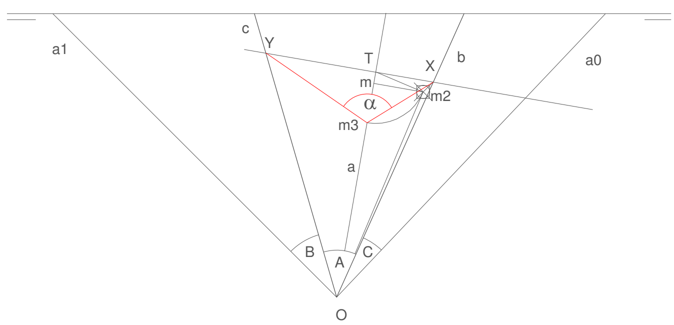
PROCEDIMIENTO

- Trazamos la línea de tierra (que llamaremos LT)
- Elegimos un punto cualquiera O en el PH (plano horizontal)
- A partir de O dibujamos la cara A lo que nos da las aristas b y c.
- La cara C a la derecha de b lo que nos da la arista a0 abatida de a con charnela b
- La cara B a la izquierda de c lo que nos da la arista a1 abatida de a con charnela c
- Elegimos un punto m0 cualquiera sobre a0 y la distancia Om0 la llevamos , a partir de O, sobre a1 => m1
- Desde m0 una perpendicular a b que corta en d0
- Desde m1 una perpendicular a c que corta en d1 a la arista c
- Ambas perpendiculares, en su prolongación, se cortan en m.
- Uniendo Om tenemos la proyección horizontal a de la arista a
- Por m trazamos una paralela a b y con centro en d0 y radio d0m0 trazamos un arco que corte a la paralela en m00 y el ángulo de esta línea con la perpendicular a b es el diedro β . También tenemos que mm00 = m' el valor de la cota de M, lo que nos permite situar en diédrico al punto M.

  Fijarse que es el ángulo que se forma entre la hipotenusa y el cateto que no es paralelo a la arista.

- Por m trazamos una paralela a c y una perpendicular => d1 (ahora podríamos realizar el desabatimiento de m1 como hemos hecho antes con m0, pero si nos damos cuenta de que tanto m0 como m1 son el mismo punto M abatido, el triángulo rectángulo que se forma en el abatimienro ha de tener el mismo valor m'=cota de M sobre la paralela a la charnela luego...) con centro en m y radio m' cortamos a la paralela en m10. Unimos d1 con m10 y tenemos ϒ .

CONTINUO EL DIBUJO Y CONSERVO LO ESENCIAL
PARA MAS DETALLE Y CLARIDAD



CONTINUAMOS ...

- Por m una perpendicular a la recta a y prolongamos una cantidad m' => m2 (abatido de M con charnela a)
- Uniendo Om2 es la recta abatida de OM respecto de a como charnela
- Por m2 perpendicular a Om2 y prolongamos hasta cortar a la proyección a => T
- Por T perpendicular a la proyección a y en los cortes con b y c tenemos los puntos X e Y
- Con centro en T y radio Tm2 marcamos el punto m3 sobre a.
- Unimos m3 con X e Y y tenemos el diedro α .

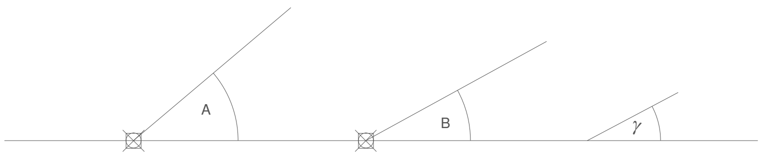
CASO A, B, γ

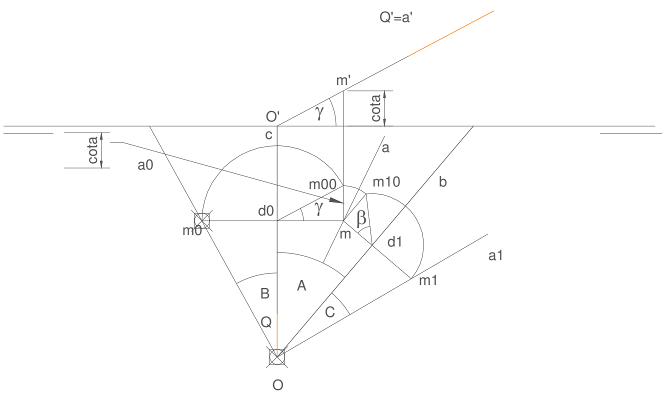
DESARROLLO

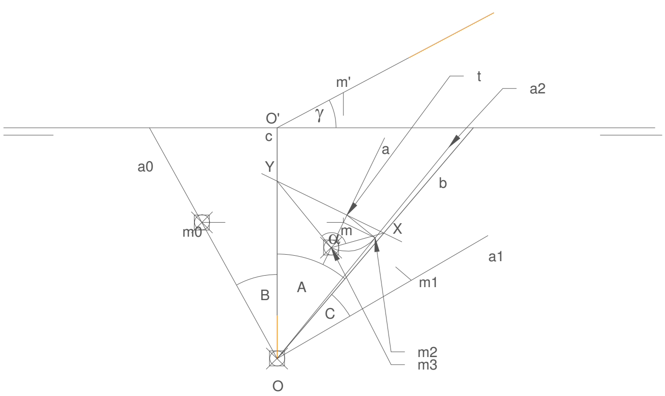
Ponemos la cara A sobre el PH. De aquí tenemos las aristas b, c
Tenemos la precaución de poner la arista c perpendicular a LT para así tener en VM el diedro γ y también tenemos la traza Q' de la cara B (en realidad del plano que contiene a la cara B). La traza horizontal Q de la cara B coincide con la arista c por lo que al situar la arista c perpendicular al plano, la cara B tiene las trazas de un PPV (plano proyectante vertical).
Como la arista a en el espacio está contenida en la cara B su pv está confundida con Q'.
A la izqda de c trazamos el dato de la cara B, lo que nos dará la arista a0 abatida de a y en VM.
Elegimos un punto m0 cualquiera sobre a0 y desabatimos:

- Trazar perpendicular por m0 a c con punto de corte en c => d0 y prolongamos
- Por d0 trazamos una paralela a Q' (nos dará un ángulo igual a γ)
- Con centro en d0 y radio d0m0, cortamos al ángulo en m00
- Desde ese punto bajamos una paralela a c => m, de modo que mm00 nos da la cota del punto M y Om nos da la proyección horizontal de la arista a.

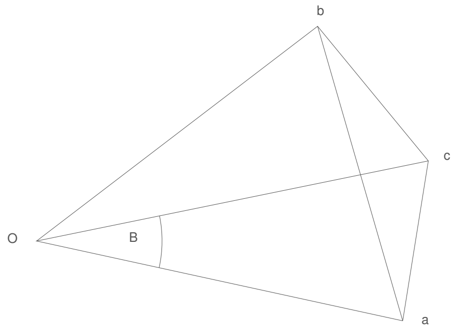
Situamos el punto M en diédrico con m, m' y ahora abatimos M con b como charnela por lo que tenemos a1, también tenemos la cara C en VM y el diedro β
Ahora conocemos las tres caras y dos diedros y estamos en condiciones de terminar el problema aplicando lo aprendido en el primer caso.

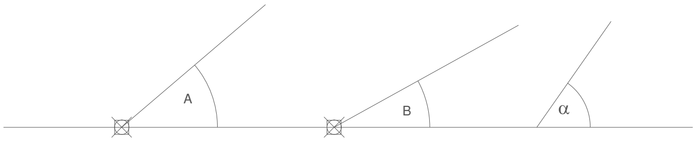






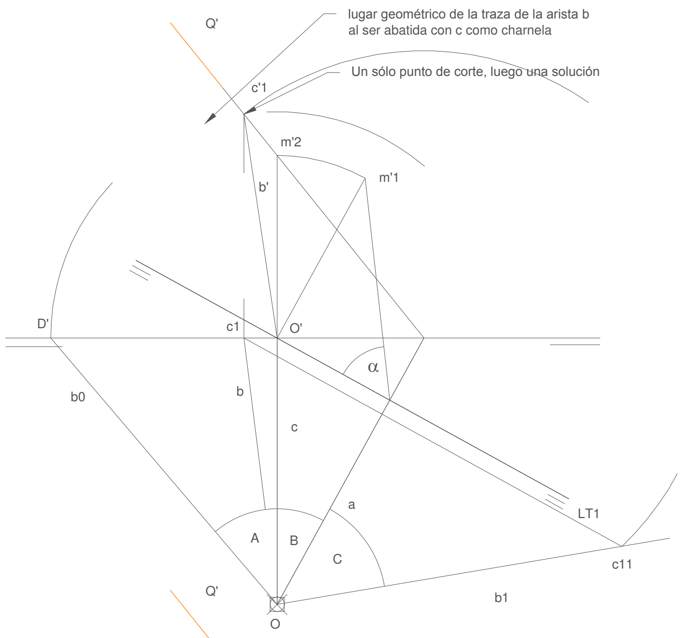
CASO A, B, α





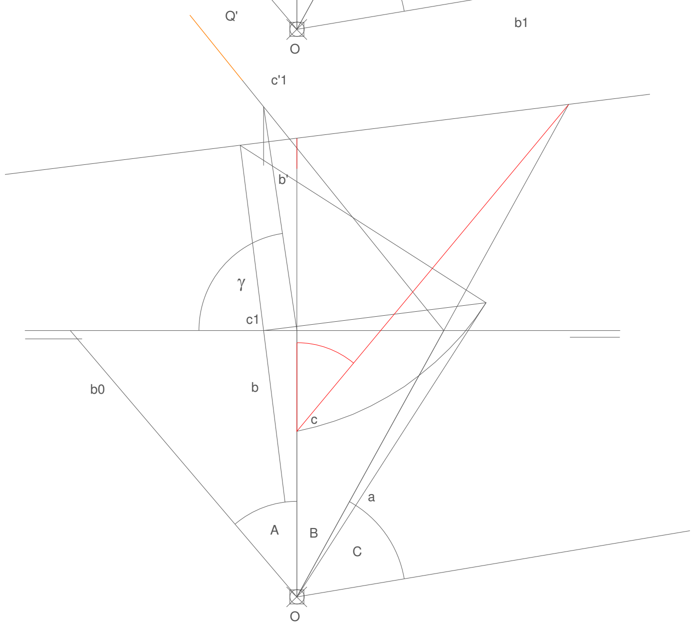
DESARROLLO

Si ponemos la cara B sobre el plano horizontal y la arista c perpendicular a la LT.
Llamemos M al punto del PV que es traza de la arista B. Cuando abatimos la arista b con c como charnela y conservando el ángulo de la cara A, , el punto M recorre una semicircunferencia sobre el plano vertical dejando un rastro hasta tocar a la LT en un punto que coincide con el punto de corte D' de la arista abatida b0. Luego O' D' es el radio dela semicircunferencia que es el lugar geométrico de la traza que va dejando la arista b al ser abatida alrededor dela arista c.
Por otro lado si realizamos un cambio de plano vertical trazando por O' una nueva LT que llamamos LT1 y que será perpendicular la arista a, ocurre que en LT1 aparece el ángulo diedro α en VM. que trazaremos y deshacemos el cambio de plano para tener Q' que es la traza de la cara C.
Esta traza ha de cortar a la arista b en el espacio en un punto que ha de ser un punto dela traza que dejaba b en el abatimiento y un punto dela traza Q'. Luego en diédrico si la arista b corta a la semicircunferencia en dos puntos c1 , c2, tendremos dos soluciones, si en un punto, una solución y si en ninguno, ninguna solución.
Uniendo en el espacio O con C1 tendremos la arista b en el espacio, luego si unimos O' con n1, en diédrico, tenemos la pv b' de la arista b.
Ahora y a la izqda de c trazamos la cara A => b0 arista abatida de b con c como charnela.
Sabemos que c1 es un punto de arista b situado en el plano vertical, luego su cota es 0, por lo que bajando una perpendicular a LT en el punto de corte lo unimos con O y tenemos b la ph de la arista homónima.
Abatimos C1 con a como charnela => b1 y el punto abatido c11y en VM la cara C
Ya tenemos las tres caras, podemos resolver el problema como sabemos.



PROCEDIMIENTO

- Trazar la LT
- Elegir un punto cualquiera O como vértice en el plano horizontal del triedro. Poner la arista c perpendicular a LT.
- A la drcha de c trazar el ángulo de la cara B => a
- Por O' una perpendicular a la arista a que llamaremos LT1 (nueva LT para el cambio de plano) y en el punto de corte trazar el diedro α.
- Por O' levantamos una perpendicular hasta cortar al lado del diedro => m'1
- Deshacemos el cambio de plano y para ello por O' (donde se cortan las dos líneas de tierra) levantamos una perpendicular a LT y con centro en O' y radio O'm'1 obtenemos m'2
- Unimos m'2 con la traza de a en la LT => Q'
  El lado del ángulo del diedro α es una recta situada en el plano vertical y que es la traza de la cara C, luego cuando deshacemos el cambio de plano lo que tendremos es la traza Q' de la cara C la que pasa por la traza horizontal de la arista a siendo m'2 el otro punto de la traza.
- A la izqda de c trazamos la cara A en VM => b0 (arista abatida de b con charnela c) y D' (traza de b0, es decir punto de corte de b0 con LT)
- Arco (O', O'D') que puede cortar o no a Q' => c'1, c'2 (podría no haber puntos de corte y en este caso no hay solución).
- Seguimos con c'1 (igual para c'2).
- Unimos c'1 con O' y tenemos la traza vertical b' de b.



No todos los puntos de la arista espacial b van a tener por alejamiento 0, pero sí hay un punto del que sabemos que es de b y de la traza vertical Q' de la cara B que es C1 y que por ser de la traza de la cara B está en el corte de este plano con el plano vertical y por tanto su alejamiento es c1=0.

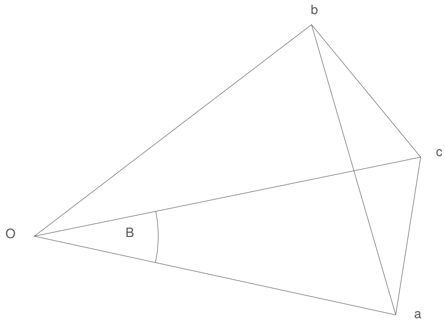
- Bajamos por c'1 una perpendicular a LT y donde la corte c1 unimos con O y tenemos b que es la proyección horizontal de la arista b.
- El punto C1 lo abatimos con arista a de charnela y tendremos en VM la cara C para lo que trazamos por c1 una perpendicular a la arista a y prolongamos. Ahora si pensamos en C1 como punto de la traza de Q' y que abatimos la traza de un plano, lo que hacemos es arco con centro en el punto donde a corta a la LT y radio desde ese punto hasta c'1 y donde corte el arco a la perpendicular tendremos c11 punto abatido de N1.
- Uniendo O' con c11 tenemos b1 arista abatida de b con charnela a y tenemos la cara C en VM.

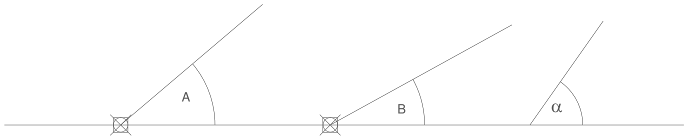
Ya podemos resolver el problema.

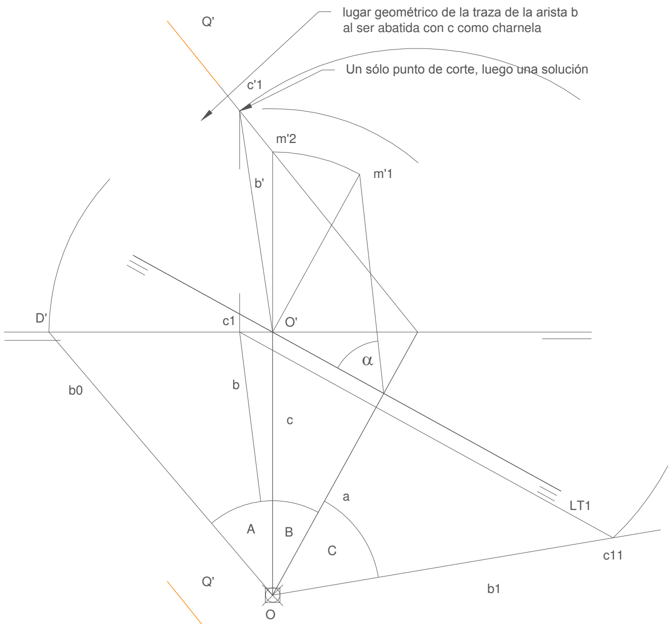
Como tenemos c perpendicular a LT el diedro ϒ nlo tenemos como el ángulo que forman b' con la LT .
nmm

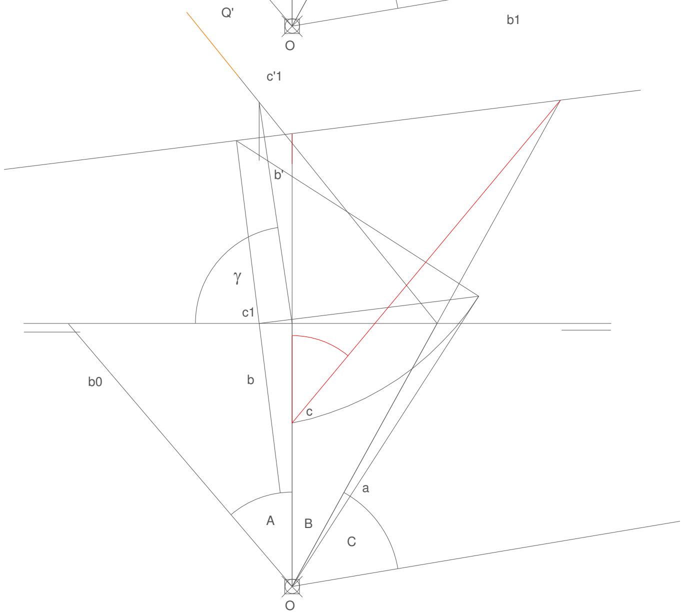
.

CASO A, B, α









DESARROLLO

Si ponemos la cara B sobre el plano horizontal y la arista c perpendicular a la LT.
Llamemos M al punto del PV que es traza de la arista B. Cuando abatimos la arista b con c como charnela y conservando el ángulo de la cara A, , el punto M recorre una semicircunferencia sobre el plano vertical dejando un rastro hasta tocar a la LT en un punto que coincide con el punto de corte D' de la arista abatida b0. Luego O' D' es el radio dela semicircunferencia que es el lugar geométrico de la traza que va dejando la arista b al ser abatida alrededor dela arista c.
Por otro lado si realizamos un cambio de plano vertical trazando por O' una nueva LT que llamamos LT1 y que será perpendicular la arista a, ocurre que en LT1 aparece el ángulo diedro α en VM. que trazaremos y deshacemos el cambio de plano para tener Q' que es la traza de la cara C.
Esta traza ha de cortar a la arista b en el espacio en un punto que ha de ser un punto dela traza que dejaba b en el abatimiento y un punto dela traza Q'. Luego en diédrico si la arista b corta a la semicircunferencia en dos puntos c1 , c2, tendremos dos soluciones, si en un punto, una solución y si en ninguno, ninguna solución.
Uniendo en el espacio O con C1 tendremos la arista b en el espacio, luego si unimos O' con n1, en diédrico, tenemos la pv b' de la arista b.
Ahora y a la izqda de c trazamos la cara A => b0 arista abatida de b con c como charnela.
Sabemos que c1 es un punto de arista b situado en el plano vertical, luego su cota es 0, por lo que bajando una perpendicular a LT en el punto de corte lo unimos con O y tenemos b la ph de la arista homónima.
Abatimos C1 con a como charnela => b1 y el punto abatido c11y en VM la cara C
Ya tenemos las tres caras, podemos resolver el problema como sabemos.

PROCEDIMIENTO

- Trazar la LT
- Elegir un punto cualquiera O como vértice en el plano horizontal del triedro. Poner la arista c perpendicular a LT.
- A la drcha de c trazar el ángulo de la cara B => a
- Por O' una perpendicular a la arista a que llamaremos LT1 (nueva LT para el cambio de plano) y en el punto de corte trazar el diedro α.
- Por O' levantamos una perpendicular hasta cortar al lado del diedro => m'1
- Deshacemos el cambio de plano y para ello por O' (donde se cortan las dos líneas de tierra) levantamos una perpendicular a LT y con centro en O' y radio O'm'1 obtenemos m'2
- Unimos m'2 con la traza de a en la LT => Q'
  El lado del ángulo del diedro α es una recta situada en el plano vertical y que es la traza de la cara C, luego cuando deshacemos el cambio de plano lo que tendremos es la traza Q' de la cara C la que pasa por la traza horizontal de la arista a siendo m'2 el otro punto de la traza.
- A la izqda de c trazamos la cara A en VM => b0 (arista abatida de b con charnela c) y D' (traza de b0, es decir punto de corte de b0 con LT)
- Arco (O', O'D') que puede cortar o no a Q' => c'1, c'2 (podría no haber puntos de corte y en este caso no hay solución).
- Seguimos con c'1 (igual para c'2).
- Unimos c'1 con O' y tenemos la traza vertical b' de b.

No todos los puntos de la arista espacial b van a tener por alejamiento 0, pero sí hay un punto del que sabemos que es de b y de la traza vertical Q' de la cara B que es C1 y que por ser de la traza de la cara B está en el corte de este plano con el plano vertical y por tanto su alejamiento es c1=0.

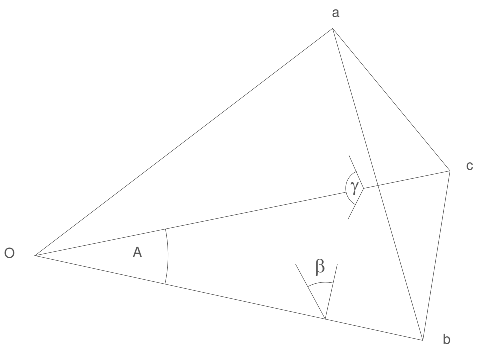
- Bajamos por c'1 una perpendicular a LT y donde la corte c1 unimos con O y tenemos b que es la proyección horizontal de la arista b.
- El punto C1 lo abatimos con arista a de charnela y tendremos en VM la cara C para lo que trazamos por c1 una perpendicular a la arista a y prolongamos. Ahora si pensamos en C1 como punto de la traza de Q' y que abatimos la traza de un plano, lo que hacemos es arco con centro en el punto donde a corta a la LT y radio desde ese punto hasta c'1 y donde corte el arco a la perpendicular tendremos c11 punto abatido de N1.
- Uniendo O' con c11 tenemos b1 arista abatida de b con charnela a y tenemos la cara C en VM.

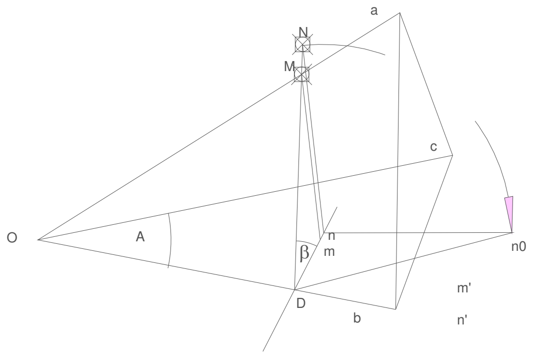
Ya podemos resolver el problema.

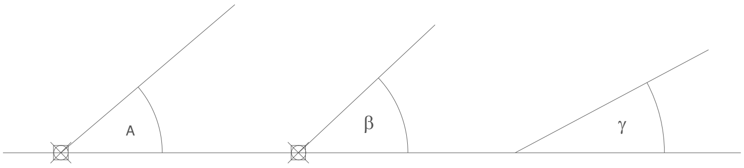
Como tenemos c perpendicular a LT el diedro ϒ nlo tenemos como el ángulo que forman b' con la LT .
nmm

.

CASO A, β, γ

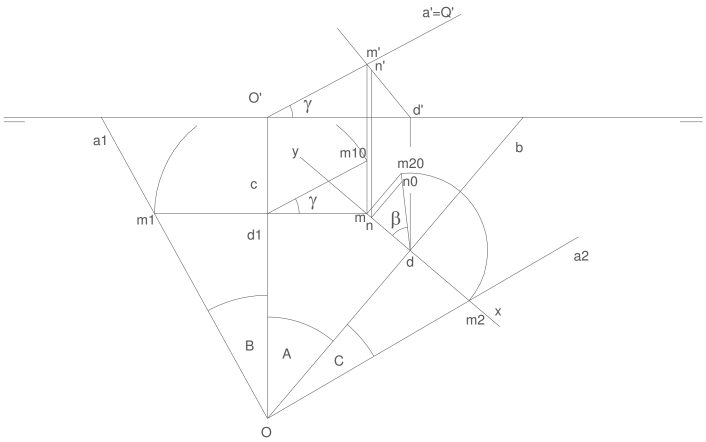






DESARROLLO

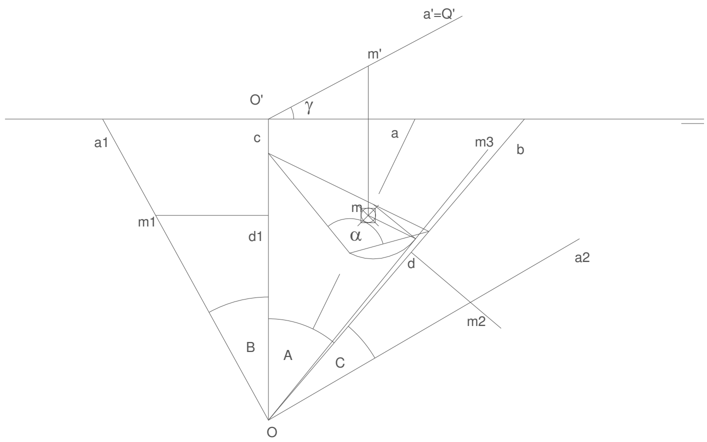
Si colocamos la cara A en PH y la arista c perpendicular a la LT, tenemos en VM el diedro γ , también tenemos la traza Q' de la cara B
Tomemos un punto N cualquiera sobre el plano que contiene a la cara C y desde N tracemos una línea de máxima pendiente hasta D. Esto significa que la línea xy es perpendicular a la arista b y que al bajar cortará a la arista a a en un punto M cuya proyección horizontal m estará sobre la línea xy. para trabajar en diédrico lo que haremos será abatir el triángulo DNn con xy como charnela. Este triángulo lo podemos construir del siguiente modo: Trazar una recta xy perpendicular a la arista b por un punto cualquiera D de la misma. Sobre xy elegimos un punto cualquiera n y por él trazamos una paralela a b. En esta paralela tomamos un punto cualquiera n0. El triángulo Dnn0 es el triángulo abatido que desabatimos obteniendo n'. Ya podemos construir la recta ND en diédrico pues tenemos dos puntos de la misma N(n', n) y D(0,d). Esta recta cortará a la pv a' de la arista a en un punto m' cuya ph estará en la perpendicular por m' hasta cortar a xy.
Insistimos en que la recta ND por estar construida con el diedro β, es una recta que se desplaza sobre la cara C y por eso mismo cortará en algún punto a la arista a.
Obtenido M pasamos a abatirlo con c como charnela y nos da m1 sobre a1 y cuando tomamos b como charnela tenemos m2 como punto abatido a a2 como arista abatida. De uno y de otro tenemos en VM las caras B y cara C.
Ya tenemos los suficientes datos para terminar el problema.



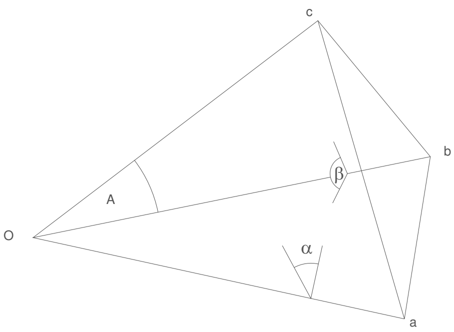
PROCEDIMIENTO

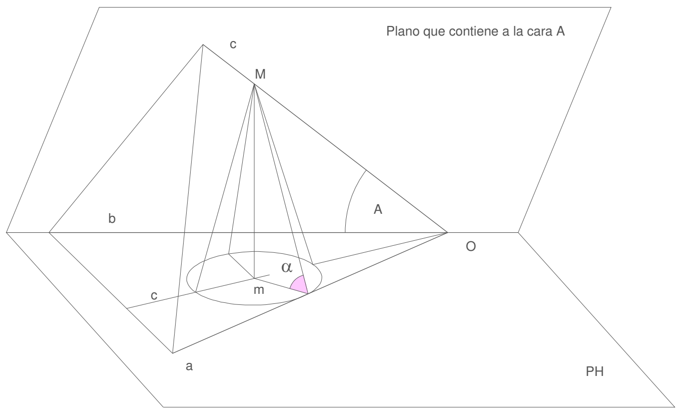
- Trazamos la lt
- Elegimos un punto O en PH y por él trazamos la arista c perpendicular ala LT
- Por O' Trazamos el diedro γ
- Trazar la cara A sobre PH poniendo a la derecha de c la arista b
- Por un punto cualquiera de b trazamos una perpendicular xy y sobre ella y a partir del punto d de corte trazamos el diedro β
- Sobre este lado del ángulo elegimos un punto cualquiera n0 y desde él una perpendicular a xy => n
- Por n levantamos una perpendicular a LT y prolongamos a partir de la LT una cota = nn0 => n'
- Tenemos D sobre el plano horizontal, luego su alejamiento es d y su cota es 0, luego d' está en la perpendicular a LT desde d y sobre la misma LT.
- Unimos n'd' y prolongamos hasta cortar a' en m'
- Desde m` trazamos la perpendicular a LT y prolongamos hasta cortar xy en m. Ya tenemos un punto M (m', m) de la arista a.
- Por m trazamos una perpendicular a c y por m una paralela a c. En esta paralela y desde m llevamos la cota m' de M y tenemos m10; y con centro d1 y radio d1m10 encontramos en la perpendicular m1 que es el abatido de M con c como charnela.
- Unir Om1 y tenemos a1 que con c nos da en VM la cara B
- Repitiendo el proceso para M y b como charnela tenemos: desde m paralela y perpendicular a b.En la paralela llevamos m' y nos da m20. Con centro en d y radio dm20 cortamos a la perpendicular en el punto m2. Unimos Om2 y tenemos en VM la cara C

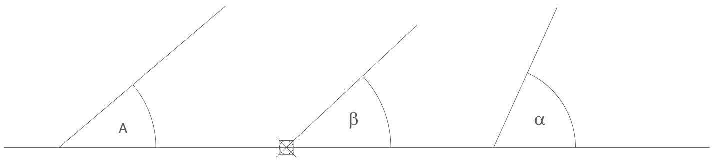
Ya podemos terminar el ejercicio aplicando lo visto anteriormente



CASO A, α, β







DESARROLLO

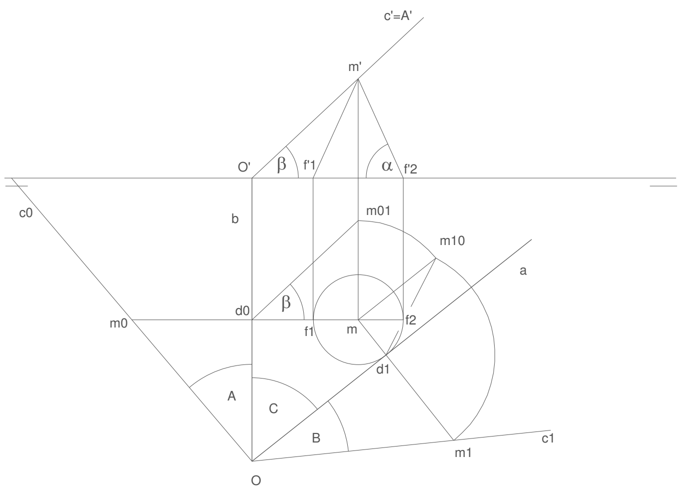
Observando la figura en el espacio lo que haremos será colocar la cara C sobre el PH con la arista b perpendicular a la LT, lo que nos dará en VM el diedro β. Además tendremos c' que es la pv de la arista c y A' que es la traza del plano que contiene a la cara.
Ahora lo que haremos será apoyar un cono recto en la cara B con vértice en un punto M de la arista c. Al apoyar el cono en la cara del triedro tenemos que la generatiz del cono que es tangente con el plano que contiene a la cara B es una recta de máxima pendiente del plano por eso con la base forma el ángulo α.
Este cono en la base tendrá un ángulo igual a α con la base apoyada en PH que será una circunferencia con centro en m que es la proyección horizontal de M y que se encuentra sobre la proyección horizontal de la arista c. Este cono tendrá una proyección sobre el PV que será un triángulo isósceles con ángulo en la base igual a α y vértice en m'
Lo que haremos en el procedimiento es, a partir del dato de la cara A, abatir la arista c a la derecha de la charnela b y tenemos c0.
Con un punto m0 cualquiera de c0 , lo desabatimos y tenemos M(m', m) un punto de la arista c.
A partir de m' como vértice construimos un triángulo isósceles con ángulo en la base α y tenemos que la base f'1, f'2 del triángulo marca el diámetro de la circunferencia de la base. Recordemos que el cono tiene en proyección vertical un triángulo isósceles y en proyección horizontal una circunferencia.
Otro detalle de este cono es que la circunferencia d la base es tangente a la arista a, luego cunado en diédrico tengamos la circunferencia base del cono lo que haremos es trazar desde O la tangente a la circunferencia y esto nos dará la arista a y por tanto lacara C. Si abatimos M con a como charnela tendremos m1 y la unión de Om1 nos dará c1 la arista abatida de c y por tanto la cara B.

Ya podemos terminar de resolver el triedro.

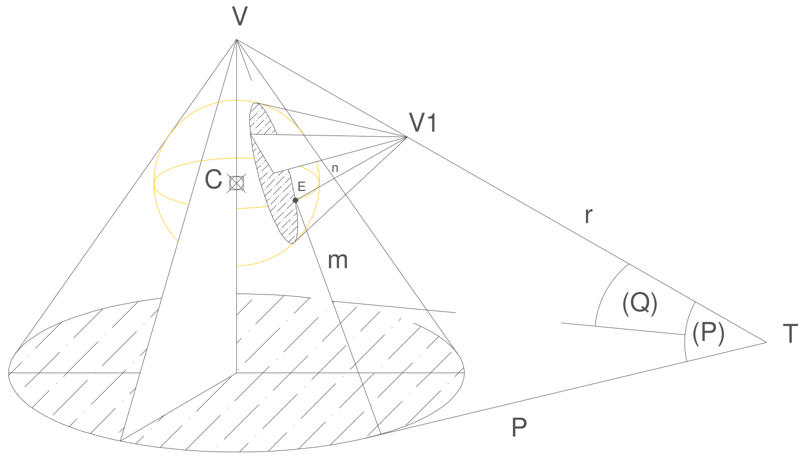
PROCEDIMIENTO

- Trazamos la LT y un punto O en PH.
- Por O trazamos la arista b perpendicular a LT => O'
- Por O' trazamos el diedro β => c'=A' tenemos la pv de la arista c y la traza vertical del plano que contiene a la cara A
- A la iqda de B trazamos el dato de la cara A abatida con b como charnela lo que me da en VM la cara A y tenemos c0 como arista c abatida.
- Tomamos m0 un punto cualquiera sobre c0 y desde él trazamos una perpendicular a b y tenemos d0 y prolongamos.
- Sobre esta línea construimos el ángulo β.
- Con centro d0 y radio d0m0 trazamos un arco hasta m01.
- Por m01 levantamos una perpendicular a LT y tenemos m' sobre c' y tenemos m sobre la recta m0d0 que nos define un punto M sobre la arista c y de componentes diédricas (m', m).
- A partir de m' como vértice trazamos un triángulo m'f'1f'2 isósceles y con ángulo en la base el dato α.
- Desde f'1 y f'2 bajamos perpendiculares a LT y hasta cortar a la recta m0d0 en f1 f2 que es el diámetro de la circunferencia de centro en m.
- Por O trazamos una tangente a la circunferencia => la arista a. Esta arista con b nos da la cara C.
- Abatimos M con a como charnela y para ello trazamos desde m una paralela y una perpendicular a la arista a. Sobre la paralela llevamos m' y tenemos m10. Trazamos un arco de centro d1 (corte de la perpendicular con a) y radio d1 m10 para obtener m1 punto abatido de M con charnela a.
- Unimos O m1 y tenemos c1 que es la arista c abatida alrededor de a y or tanto nos da en VM la cara B.

Ya tenemos las tres caras y dos diedros, aplicando lo estudiado antes terminamos de resolver el triedro.



CASO α, β, γ



En esta figura tenemos dos conos rectos a los que denominamos a partir de sus vértices como V y V1. Son dos conos que tienen la característica de tener inscrita una misma esfera . En estas condiciones se cumple

" *Existen dos planos tangentes comunes a la esfera y a los conos y además la recta que une los vértices se una recta que pertenece a ambos planos*"

Llamemos (P), (Q) a los planos de la propiedad.

Observemos que, si el cono V tiene la base apoyada en el plano horizontal:

Los ejes de los conos pasan por el centro C de la esfera.

Los ángulos de las generatrices con la base permanece constante.

La generatriz m del cono V es la tangente donde se apoya el plano (P) que pasa por dicha generatriz y por la recta de los vértices r.

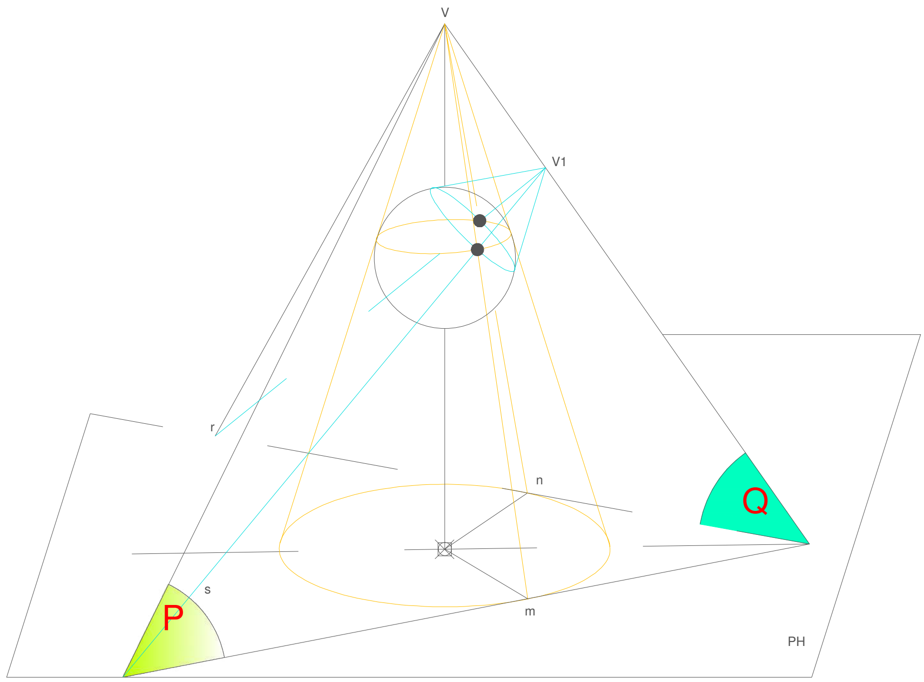
(P) tiene una traza horizontal P que pasa por la traza T de la recta r.

La traza P es tangente a la base del cono V

La generatriz n del cono V1 es la que es tangente al plano (P) y a la esfera

El punto E es el punto común a los conos, esfera y plano P.

Análogamente por el otro lado tenemos el plano (Q) que es tangente a los dos conos y a la esfera. A los dos conos en generatrices una por cada cono (antes teníamos para (P) a m y n). y tangente a la esfera en otro punto (antes teníamos a E).



NOMENCLATURA

PH = Plano horizontal.

PV = Plano vertical.

PPV = Plano proyectante vertical.

LT = Línea de tierra.

pv = Proyección vertical.

ph = Proyección horizontal.

VM = Verdadera Magnitud.

DESARROLLO

La propiedad enunciada anteriormente es la que vamos a usar para resolver el triedro.

Para ello apoyamos la base del cono recto de vértice V en PH. Para este cono vamos a usar el diedro α como ángulo en la base por lo que, si nos fijamos en las figuras, tenemos a la arista a tangente a la base del cono y situada en PH.

La arista a pertenece a dos caras B,C. Más tarde decidimos en que cara de las dos que comparten la arista a situamos en PH. Pero lo que sí tenemos es la arista a tangente a la base y la base está situada en PH luego la arista a la tenemos en PH.

Con el otro cono vamos a usar para ángulo de la base el diedro β y esta base estará apoyada en una cara del diedro que ahora pasaremos a determinar de forma que nos facilite el trabajo ya que la arista del diedro β es la arista b y esta arista pertenece a dos caras C, A.

¿Qué cara elegimos para situarla en PH?

Desde luego si tenemos la arista a en PH, ha de ser una de las que contienen a la arista, es decir, B o C.

Cualquiera nos sirve, así que elegimos la B. Con la cara B en PH tenemos dos aristas a, c en PH y lo que hacemos es poner la arista c perpendicular a línea de tierra para tener en VM el diedro γ(gamma) la traza A' del plano que contiene a la cara A.

Sobre A' y confundida con ella está la pv b' de la arista b.

Sabemos que la arista b es una recta de la cara A y, por tanto, del plano que la contiene y el plano es un PPV ya que la ph del plano es perpendicular a la línea de tierra.

Vamos a elegir un punto para vértice del cono V.

Tenemos A', y si observamos el dibujo ynos imaginamos que el triedro está resuelto, observamos que el vértice del cono está sobre la arista b y en la traza del plano de la cara A, luego lo que elegimos es un punto cualquiera de la cara A que , en proyección vertical, significa un punto cualquiera de A'. Lo que hemos de garantizar es que el punto está en la cara , es decir, que el punto cualquiera V que elijamos ha de ser punto de una recta contenida en (A).

Vemos que (A) es un PPV. Una recta frontal contenida en este plano es una recta que tiene la pv confundida con la del plano A' y como ph una paralela a la LT.

Luego tomamos v' un punto cualquiera de A' y su ph será cualquier punto v en la vertical de v' porque podemos siempre trazar por v una recta frontal contenida en el plano.

Ya tenemos V(v', v) que . Con v' y en PV, construimos un triángulo isósceles sobre la LT con vértice v' y ángulo en la base $\alpha \Rightarrow$ D, D' estos puntos sobre la LT determinan el diámetro de la base del cono.

El cono es recto por lo que la proyección sobre el proyección horizontal del vértice nos dará el centro de la circunferencia base, que coincide con la ph de v.

Hasta ahora tenemos , la traza A' de la cara A, el vértice V(v´ v), el diámetro D1D2 de la circunferencia base con centro en v.

Por un punto cualquiera del eje del cono V vamos a trazar una esfera tangente interior al cono. En diédrico y en proyección vertical esto nos dará una circunferencia tangente a los lados iguales del triángulo isósceles de vértice V con centro en un punto cualquiera de la altura del triángulo. Esta esfera en proyección horizontal será otra circunferencia con centro en v.

Ahora apoyamos la base del segundo cono en la cara A y tomamos como ángulo de la base β . Esto significa que el eje del cono es perpendicular al plano (A) y que ha de pasar por el centro de la esfera y ser circunscrito a la esfera para poder aplicar la propiedad en la que nos basamos.

Como el eje es perpendicular a (A), las trazas de su recta serán perpendiculares a las trazas del plano (A), por lo que en pv tendremos un triángulo isósceles cuya base está en A' y cuya altura sería el eje del cono por lo que ha de pasar por el centro de la esfera y ser perpendicular a A'. Con la base del triángulo isósceles y la recta que forma su altura (eje del cono) construimos el triángulo con ángulo en la base β y los lados iguales del triángulo han de ser tangentes a la circunferencia de centro n' y que es la pv de la esfera inscrita en el cono y se determina el vértice v'1.

En pv la recta v'v'1 es la proyección vertical de la recta que une los vértices y de la que buscamos su traza horizontal (el punto donde la recta corta al PH) que, vemos en la figura, es un punto de la arista a.

Veamos cómo es esta recta.

Para ello razonemos sobre los ejes de los conos.

El eje de V es una recta perpendicular al PH y pasando por el centro de la esfera, luego es una recta vertical pasando por v. Recordemos que la ph del centro de la esfera está sobre v.

El eje de V1 es una recta frontal ya que su traza horizontal es perpendicular a la traza A y por tanto paralela a LT.

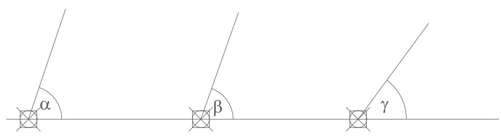
Ambos ejes determinan un plano que es un plano frontal pasando por v.

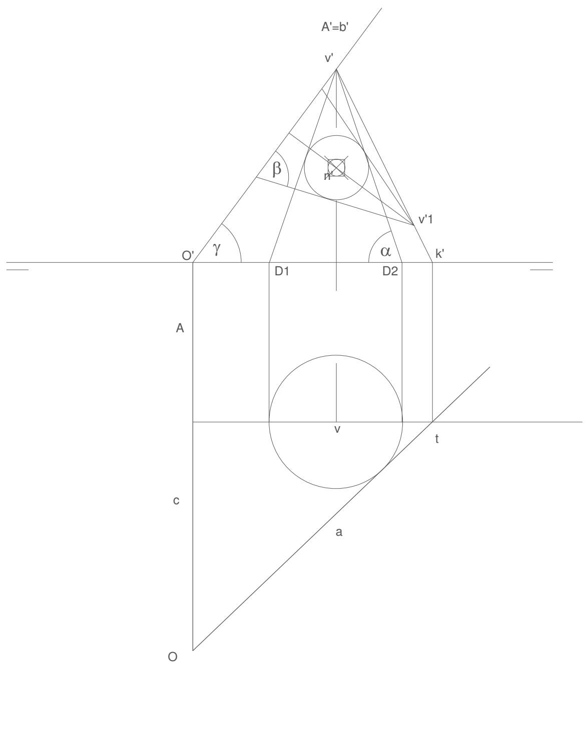
La recta VV1 pertenece a este plano frontal luego la ph de la recta que une los vértices es una paralela a LT por v, es decir, la recta que une los vértices es una recta frontal.

Tenemos la pv de la recta que une los vértices que es v'v'1 y prolongamos hasta cortar línea de tierra en k'. Como esta recta es una recta frontal, tenemos la horizontal por v que corta en t a la perpendicular a línea de tierra por k'.

Sabemos que t es un punto de la arista a, luego desde t trazamos la tangente a la circunferencia base del cono V y prolongamos hasta cortar a c donde tenemos O vértice del triedro y a arista, luego entre a, c tenemos en VM la cara B.

Tenemos una cara y dos diedros ya estamos en uno de los casos estudiados anteriormente y podemos resolver el triedro





PROCEDIMIENTO

- Ponemos la arista c perpendicular a línea de tierra. Llamamos O' al punto de corte de c con LT.
- Trazamos $\gamma \Rightarrow$ tenemos la pv A' del plano que contiene a la cara A y b' .
- Sobre A' tomamos un punto cualquiera v' y su ph será cualquier punto v en la vertical de v'.
- Construimos un triángulo isósceles sobre la LT con vértice v' y ángulo en la base $\alpha \Rightarrow$ D1, D2.
- Con centro en v y diámetro D1D2 se traza una circunferencia
- Trazamos una circunferencia tangente a los lados del triángulo con centro en n' un punto cualquiera de la pv de v'.
- Por n' trazamos una perpendicular a A' que tomaremos como la altura de un triángulo isósceles cuya base se apoya en A' y con ángulo β como ángulos iguales y los lados iguales han de ser tangentes a la esfera, es decir, en pv los lados iguales han de ser tangentes a la circunferencia de centro n' => v'1
- Unimos v'v'1 y prolongamos hasta la LT en k'.
- Trazamos una paralela a LT por v. POr k' bajamos una perpendicular a LT y tenemos t que es un punto de la arista a.
- Por t trazamos una tangente a la circunferencia de centro v y base del cono V y prolongamos hasta cortas a c en O.
- Tenemos la cara B y tres diedros luego estamos en condiciones de resolver el problema según hemos visto en casos anteriores.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL CASO DEL TRIEDRO CUANDO SE CONOCEN LOS TRES DIEDROS

Desde un punto O' del espacio se trazan perpendiculares a las caras. Obtenemos otro diedro que se llama polar del primero. Llamemos A', B', C' a las caras del diedro polar. A' es un plano determinado por dos rectas perpendiculares, una a la cara C y, por tanto a la arista a que es de la cara C y otra que es perpendicular a la cara B, luego a la arista a que también es del plano B. Conclusiónambas rectas, las que forman la cara A' determinan un plano que es perpendicular a la arista a.
Este plano determina un cuadrilátero donde vemos que A' y α son suplementarios,
Análogamente para las demás caras
Luego si conocemos los tres diedros, conocemos las valores de las tres caras del diedro polar y lo podemos resolver. Conocidos los diedros α', β' , γ' del polar tenemos las caras A,B,C del diedro pedido sin más que tener en cuenta que α' + A = 180 °

En el cuadrilátero de ángulos 1, 2, α , A' sabemos que 1, 2 son ángulos rectos luego los otros dos han de sumar 180°