CDU 744

SISTEMA DIEDRICO
(apuntes)

A. Rodríguez Alvarez

INDICE.

1. GENERALIDADES.

El Sistema Diédrico ó de G. Monge es un Sistema de Representación de proyección cilíndrica ortogonal.

En este Sistema de Representación se dispone de un conjunto formado por dos planos ortogonales entre sí que se suponen colocados en posición horizontal y vertical y que se denominan, por ello, plano horizontal y vertical de proyección.

Estos planos dividen al espacio en cuatro regiones ó cuadrantes.

Los planos que dividen, en dos partes iguales, al ángulo diedro formado por el horizontal y el vertical de proyección se denominan planos bisectores.

El observador se supone situado en el punto del infinito anterior al primer cuadrante.

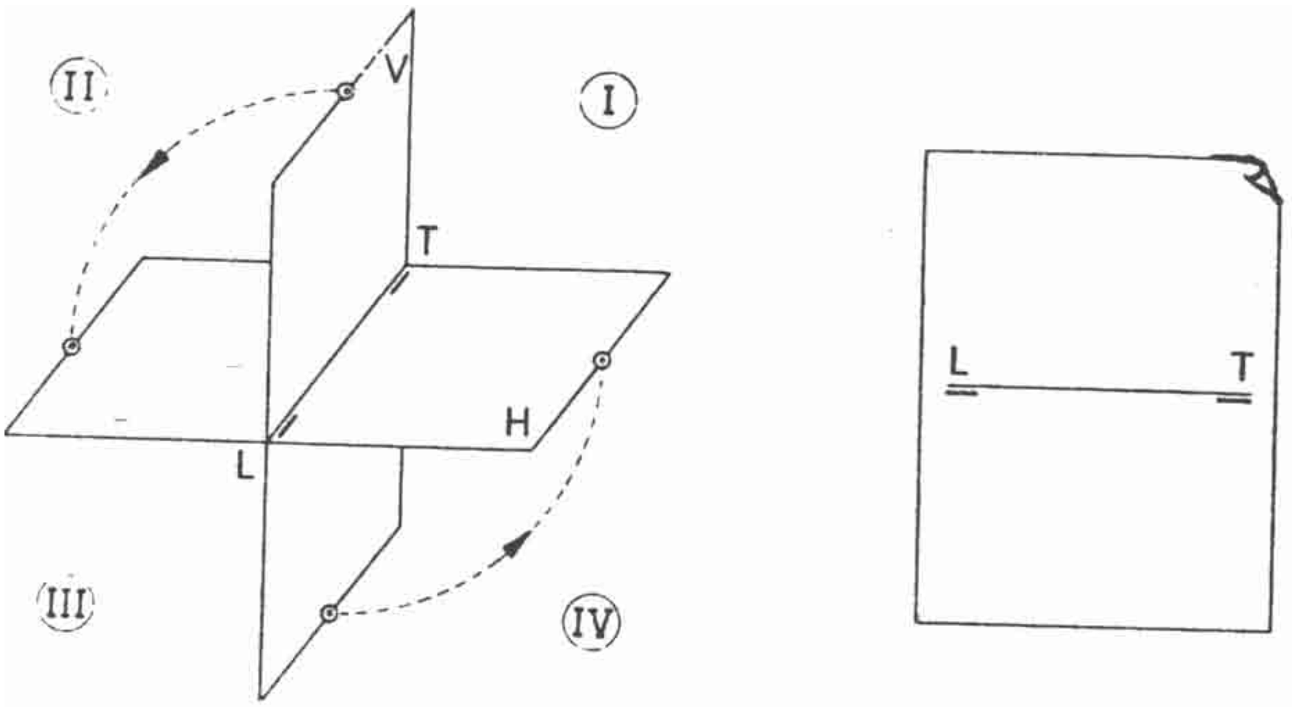


Fig. 1. Fundamentos del Sistema Diédrico.

Ahora bien, al tener que operar sobre el plano del dibujo sea éste un tablero, la pizarra ó la pantalla de un computador, se hará coincidir el plano vertical V con el horizontal H haciéndole girar alrededor de la recta de intersección de ambos planos que se denomina línea de tierra: L.T.

En el estudio del Sistema resulta de gran importancia conocer las condiciones que deben reunir las proyecciones de los puntos, rectas y planos para que ocupen una determinada posición en el espacio.

Tales reglas son de una gran ayuda para resolver la mayor parte de los ejercicios; por ello, se aconseja al alumno el estudio detenido de las mismas con el fin de familiarizarse con su manejo.

2. REPRESENTACION Y ALFABETO DEL PUNTO.

El objeto de este Sistema es representar sobre un plano las figuras del espacio y para ello se procederá de la siguiente manera:

Se proyecta ortogonalmente el punto P sobre el plano horizontal H obteniéndose la proyección horizontal **p** tambien denominada planta.

Se proyecta ortogonalmente el punto P sobre el plano vertical V y se obtiene la proyección vertical **p´** ó alzado.

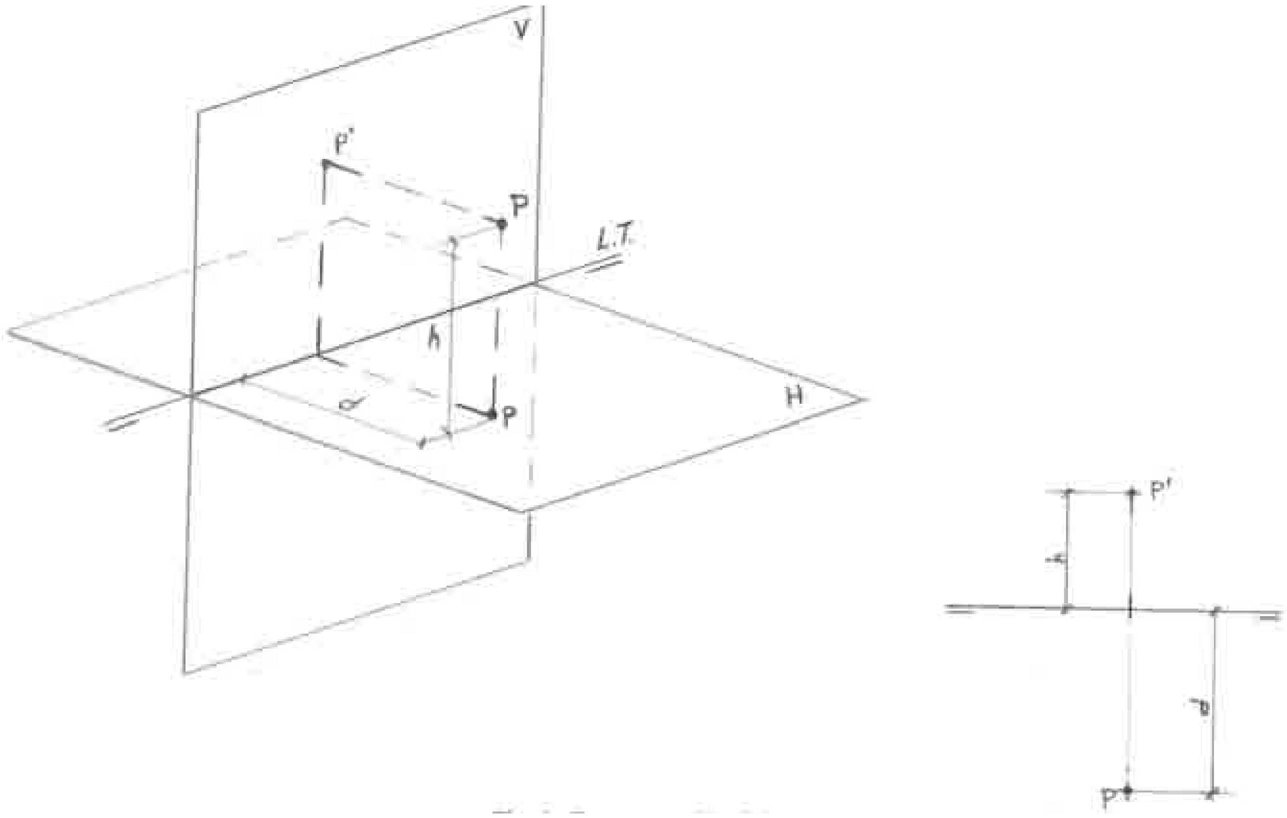


Fig. 2. Representación del punto.

Condición general que deben cumplir las proyecciones de un punto: el segmento que las une debe ser perpendicular a la L.T.

La distancia que separa al punto P del plano horizontal se denomina altura ó cota **h** del punto; la que le separa del plano vertical de proyección se denomina alejamiento **d** del punto.

Se denomina **Alfabeto del punto** a las distintas posiciones que un punto puede ocupar, en el espacio, respecto a los planos horizontal y vertical de proyección,

En total son 17 las posibles posiciones del punto como se puede observar en la fig. 3; dicha figura se ha obtenido al seccionar los planos de proyección y los bisectores por un plano perpendicular a la L.T.

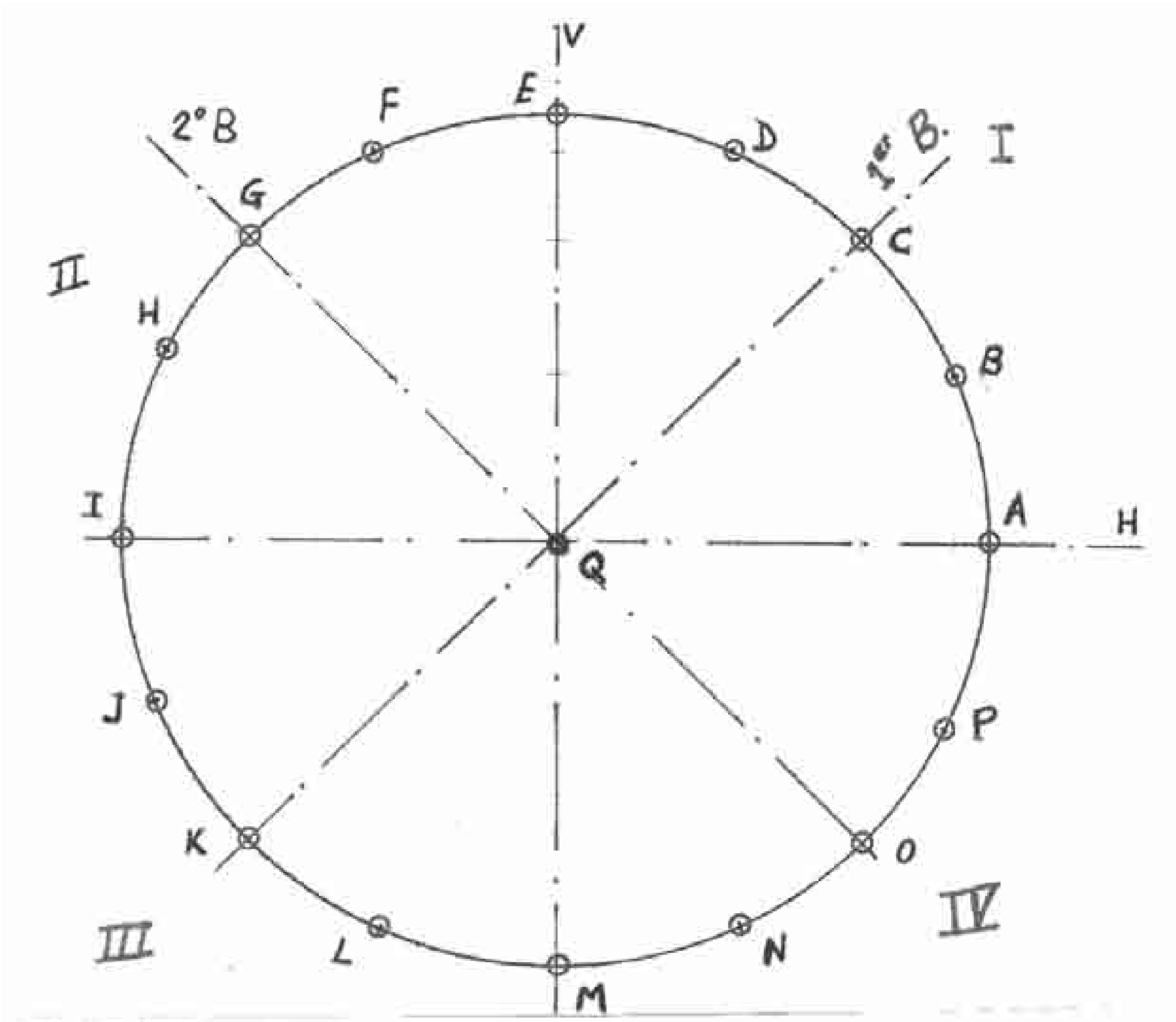


Fig. 3. Posiciones del punto en el espacio.

Las proyecciones, sobre el plano de dibujo, correspondientes a las diferentes posiciones del punto en el espacio aparecen en la fig. 4.

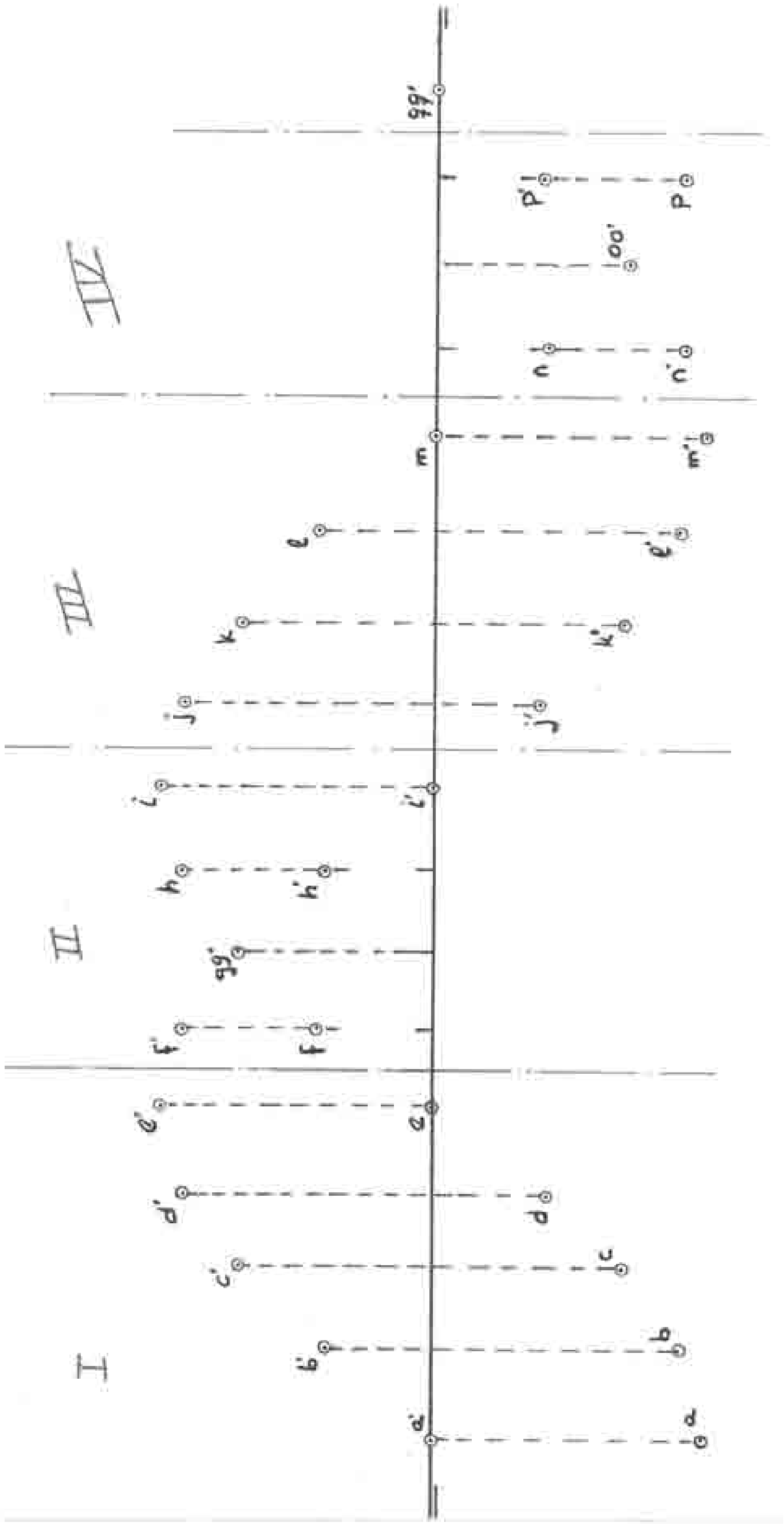
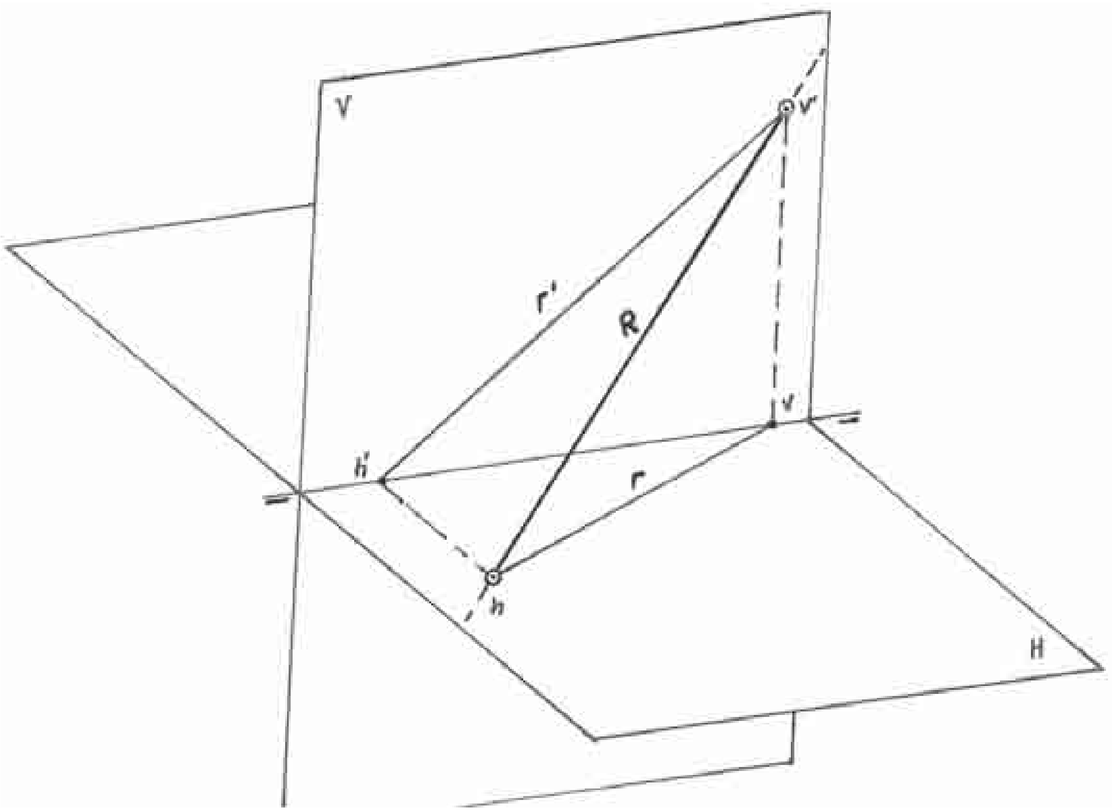


Fig. 4. Proyecciones del punto.

3. REPRESENTACION DE LA RECTA.

Una recta queda inequívocamente determinada conocidos dos puntos de la misma; para hallar sus proyecciones bastará unir las proyecciones homónimas de dos de sus puntos.



Tambien una recta queda determinada conocidas sus proyecciones horizontal y vertical con la excepción de la denominada recta de perfil que solamente quedará determinada conocidos dos de sus puntos.

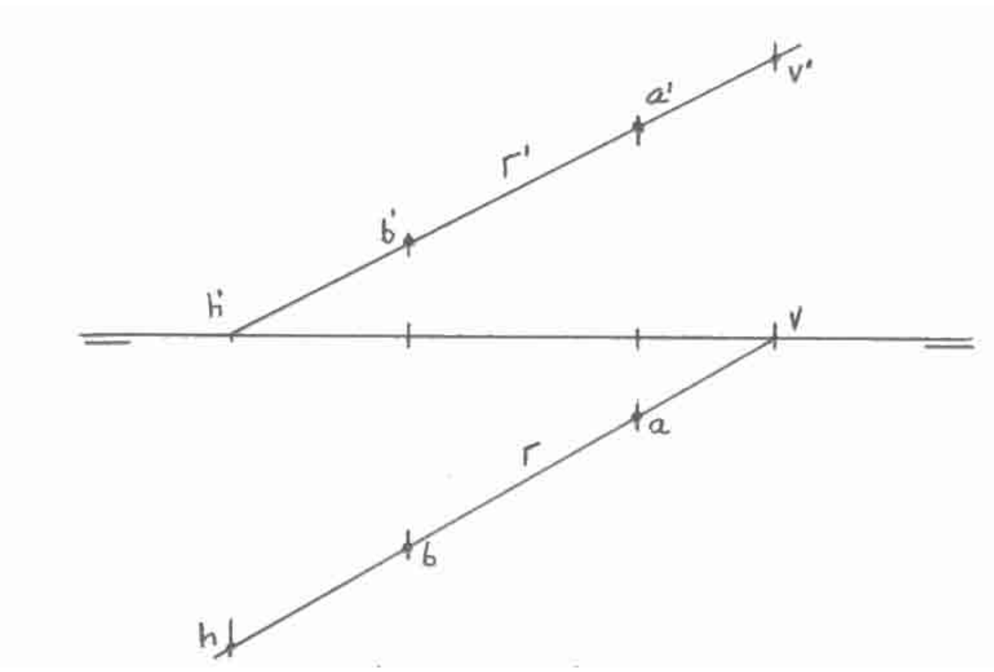


Fig. 5. Proyecciones de una recta.

Puntos notables de una recta. (fig. 6)
-Trazas de la recta.
Se denominan así los puntos de intersección de la recta con los planos de proyección:

Traza horizontal (**h-h´**): punto de la recta situado en el plano horizontal de proyección.

Traza vertical (**v-v´**): punto de la recta situado en el plano vertical de proyección.

-Punto de la recta situado en el primer bisector (**b_1-b_1´**): punto de la misma que tenga igual altura y alejamiento.
-Punto de la recta situado en el segundo bisector (**b_2-b_2´**): punto de la misma tal que coincidan sus proyecciones horizontal y vertical.

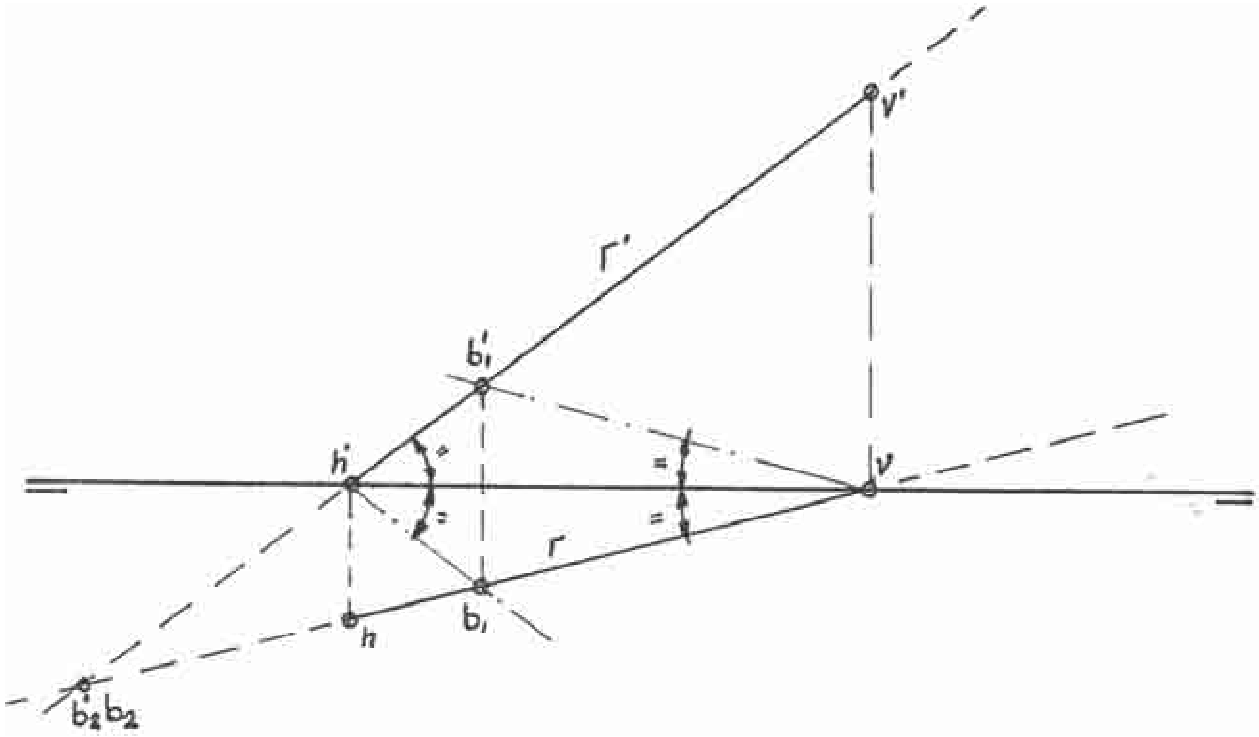


Fig. 6. Puntos notables de una recta.

Partes vistas y ocultas de la recta. (fig. 6)

Convencionalmente se considera como parte vista de una recta a la porción de la misma situada en el primer cuadrante, considerándose oculta al resto.

Los puntos que separan las partes vistas y ocultas de una recta son sus trazas:

-si las dos trazas son vistas (puntos del primer cuadrante) se considera como parte vista de la recta al segmento determinado por las trazas.

-si ambas trazas son ocultas no se considera como vista ninguna parte de la misma.

-si una de las trazas es vista y la otra oculta se considera vista la semirecta cuyos puntos están situados en el primer cuadrante.

Rectas que se cortan. (fig. 7)

Dos rectas se cortan si tienen un punto común, esto es, las proyecciones del punto están situadas sobre las correspondientes proyecciones de las rectas.

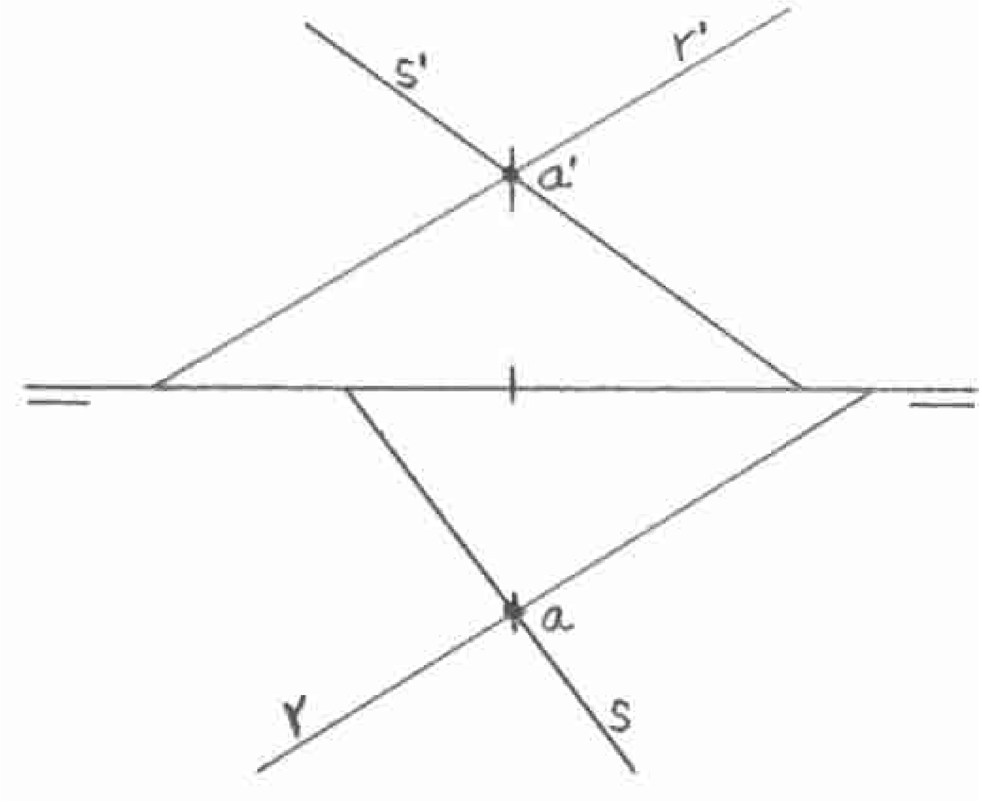


Fig. 7. Rectas que se cortan.

4. ALFABETO DE LA RECTA.

Las diferentes posiciones que una recta puede ocupar respecto a los planos de proyección se conocen como alfabeto de la recta.

En las figuras que siguen se representan algunas de ellas.

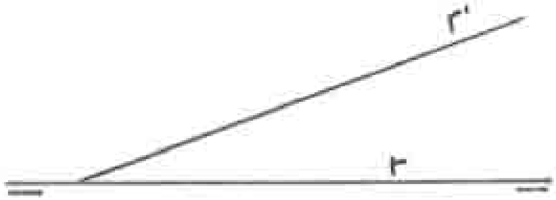


Fig. 8. Recta situada en el vertical de proyección.

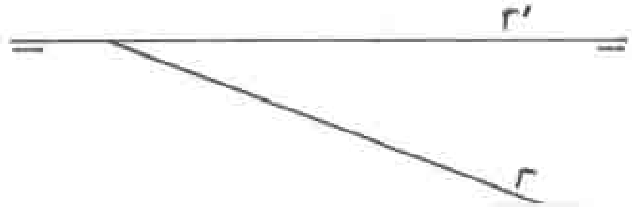


Fig. 9. Recta situada en el horizontal de proyección.

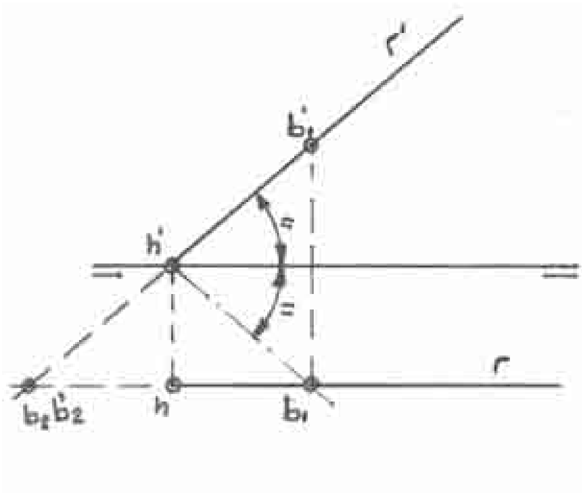


Fig. 10. Recta frontal.

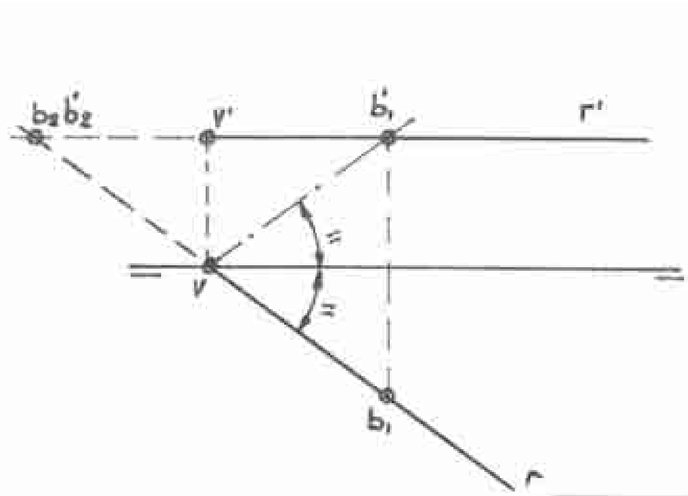


Fig. 11. Recta horizontal.

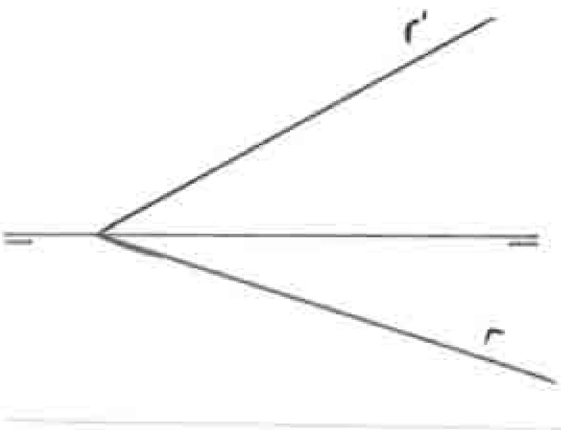


Fig. 12. Recta que corta a la L.T.

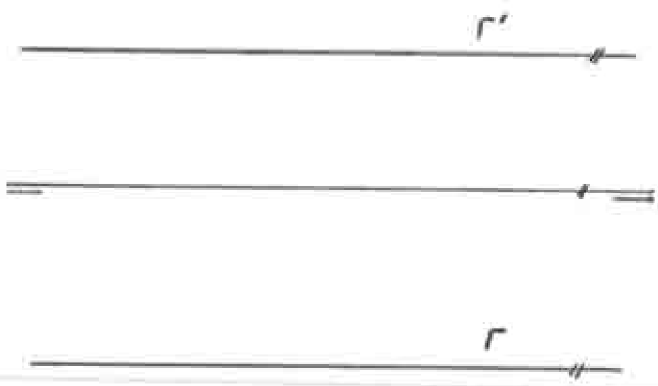


Fig. 13. Recta paralela a la L.T.

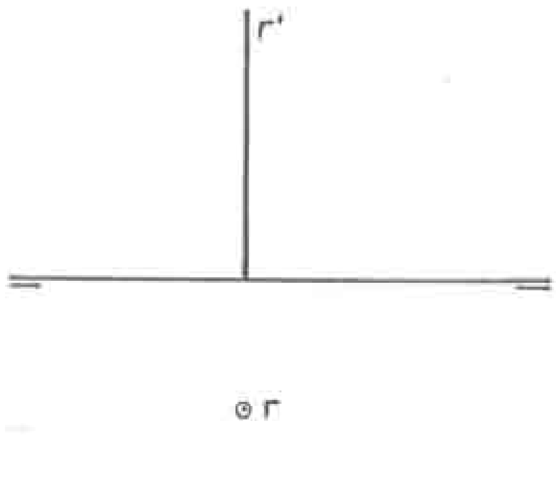


Fig. 14. Recta de punta sobre el horizontal.

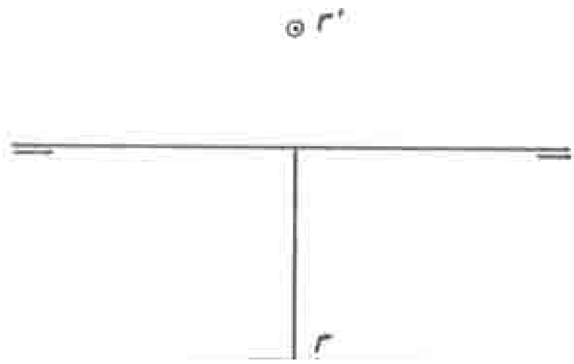


Fig. 15. Recta de punta sobre el vertical.

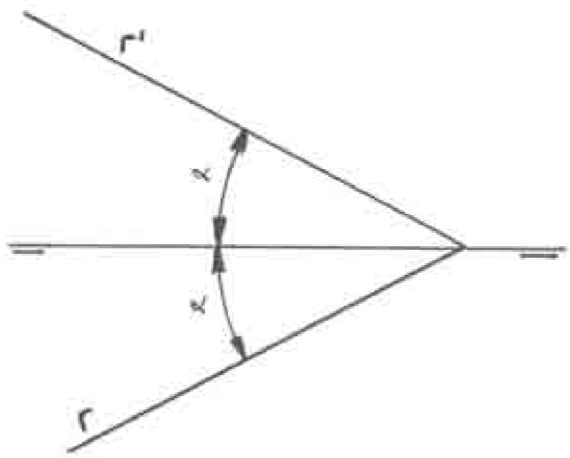


Fig. 16. Recta del primer bisector.

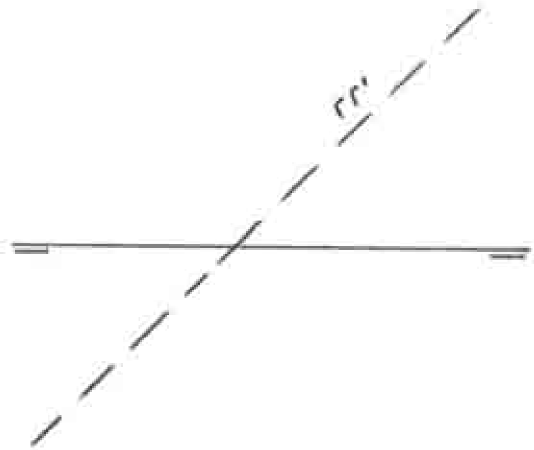


Fig. 17. Recta del segundo bisector.

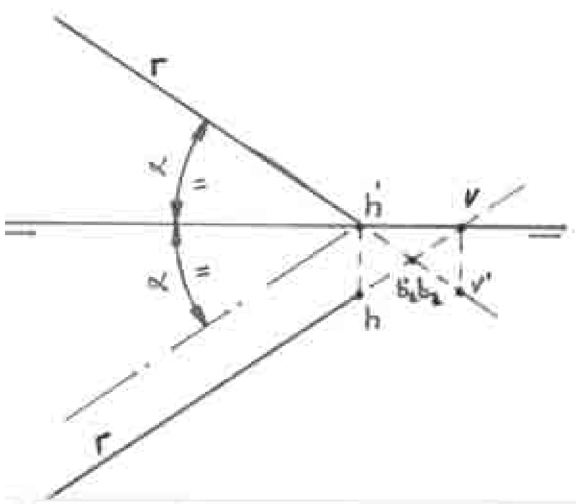


Fig. 18. Recta paralela al primer bisector.

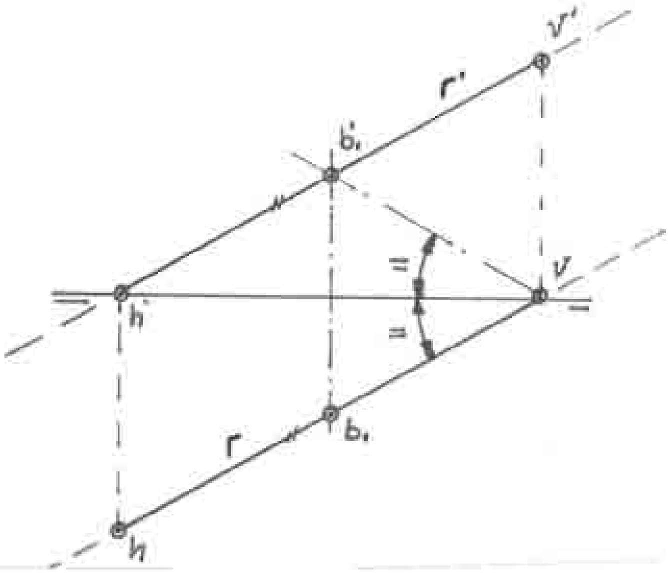


Fig. 19. Recta paralela al segundo bisector.

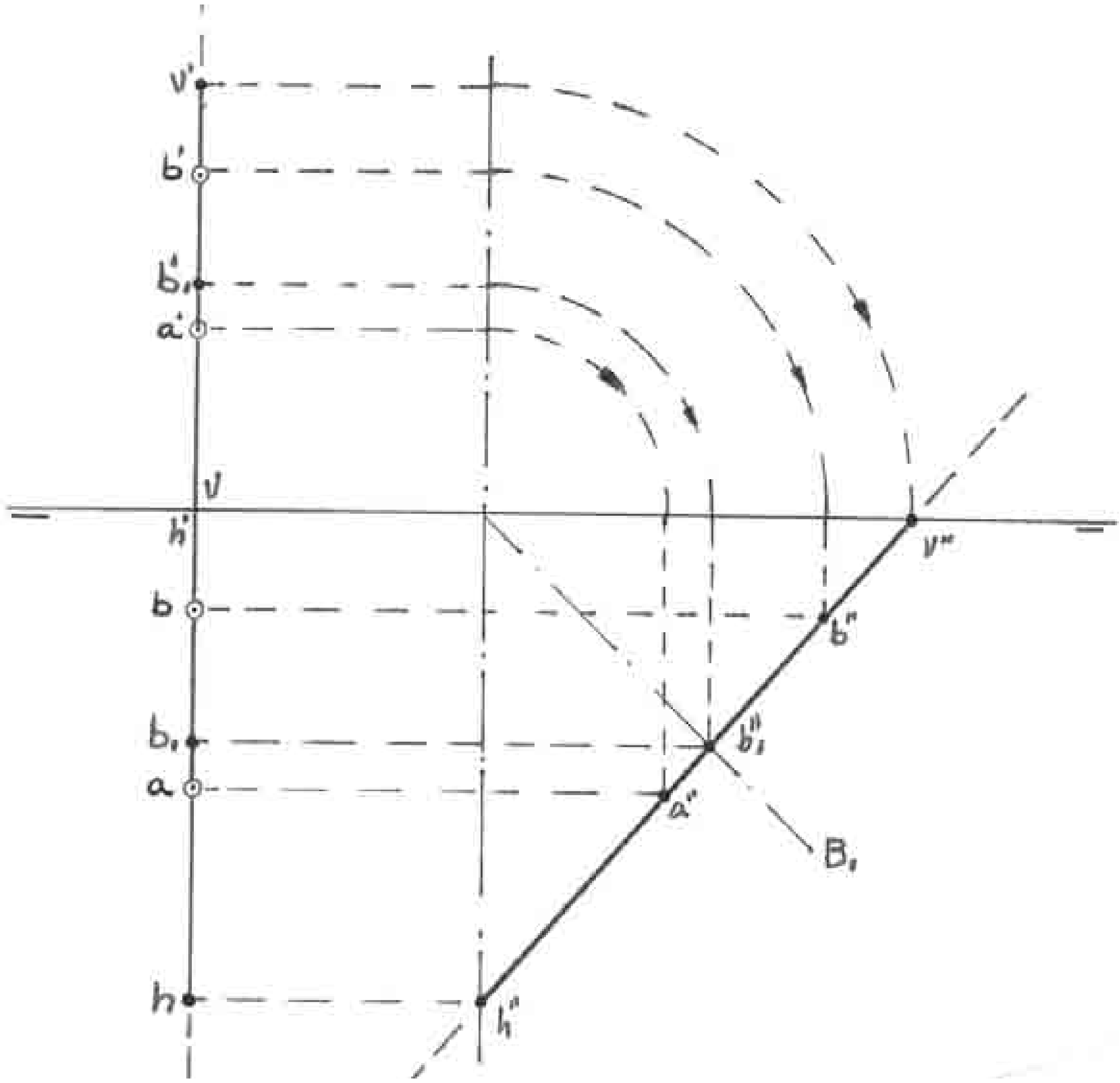


Fig. 20. Recta de perfil.

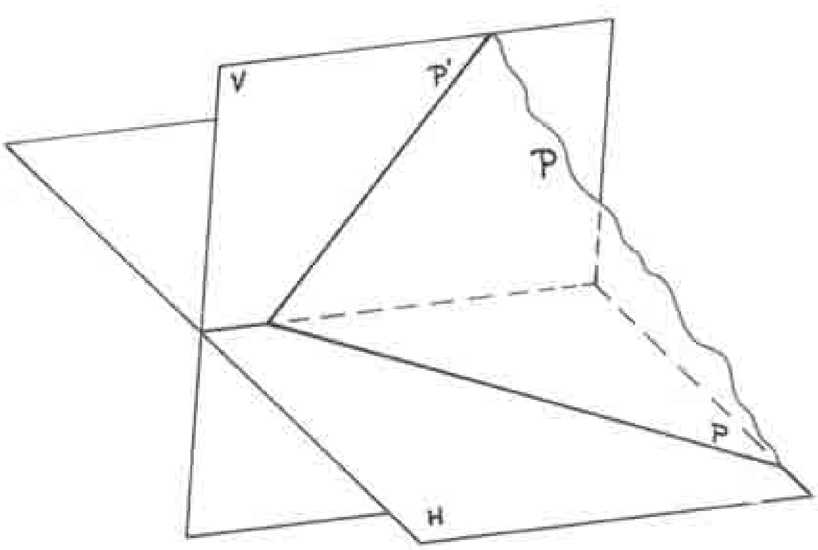
5. REPRESENTACION DEL PLANO.

Un plano queda determinado por:

-tres puntos no alineados. (fig. 22)
-un punto y una recta. (fig. 23)
-dos rectas que se cortan. (fig. 24)

Para evitar el manejo del plano por sus elementos definitorios se representa, habitualmente, por sus trazas, esto es, las rectas del plano situadas en el horizontal y vertical de proyección respectivamente. (fig. 21)

Las trazas del plano se definen como el lugar geométrico de las trazas de sus rect



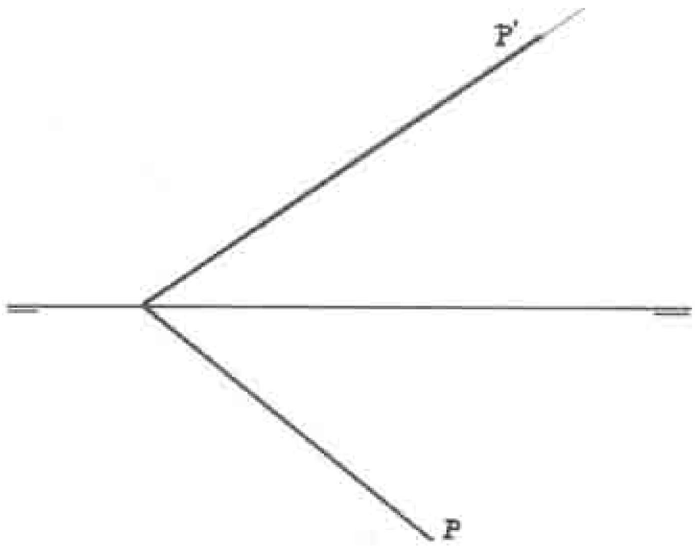


Fig. 21. Representación del plano por sus trazas.

Para determinar las trazas del plano es suficiente con determinar las de dos rectas del mismo; quedan así determinadas las trazas buscadas. (fig. 22; 23; 24)

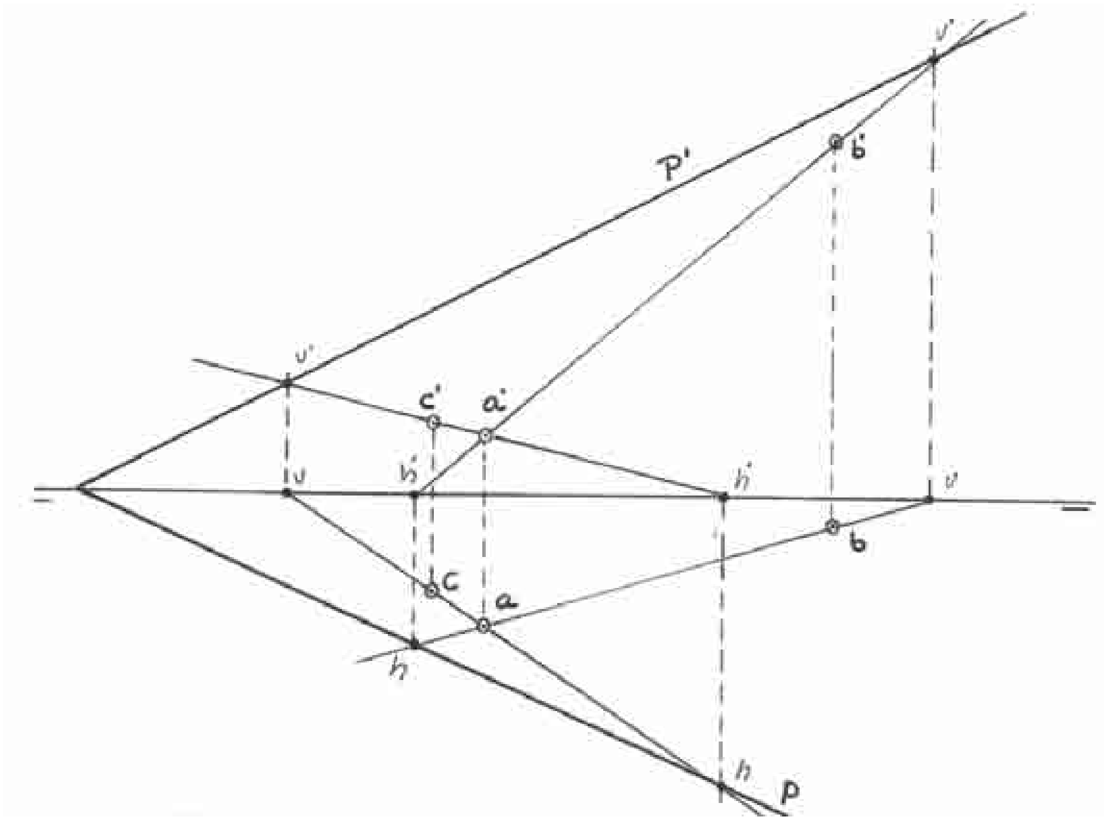


Fig. 22. Plano determinado por tres puntos ABC no alineados.

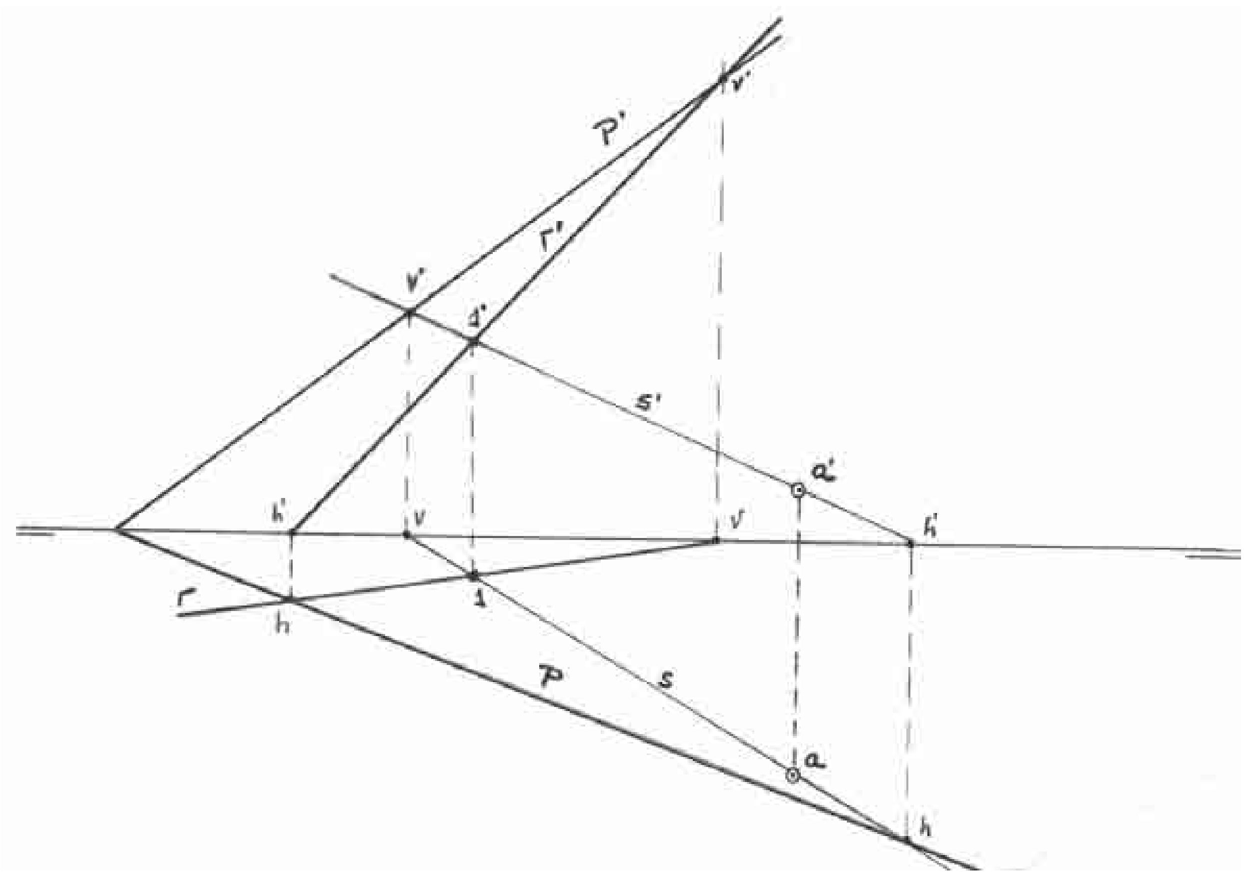


Fig. 23. Plano determinado por un punto A y una recta R.

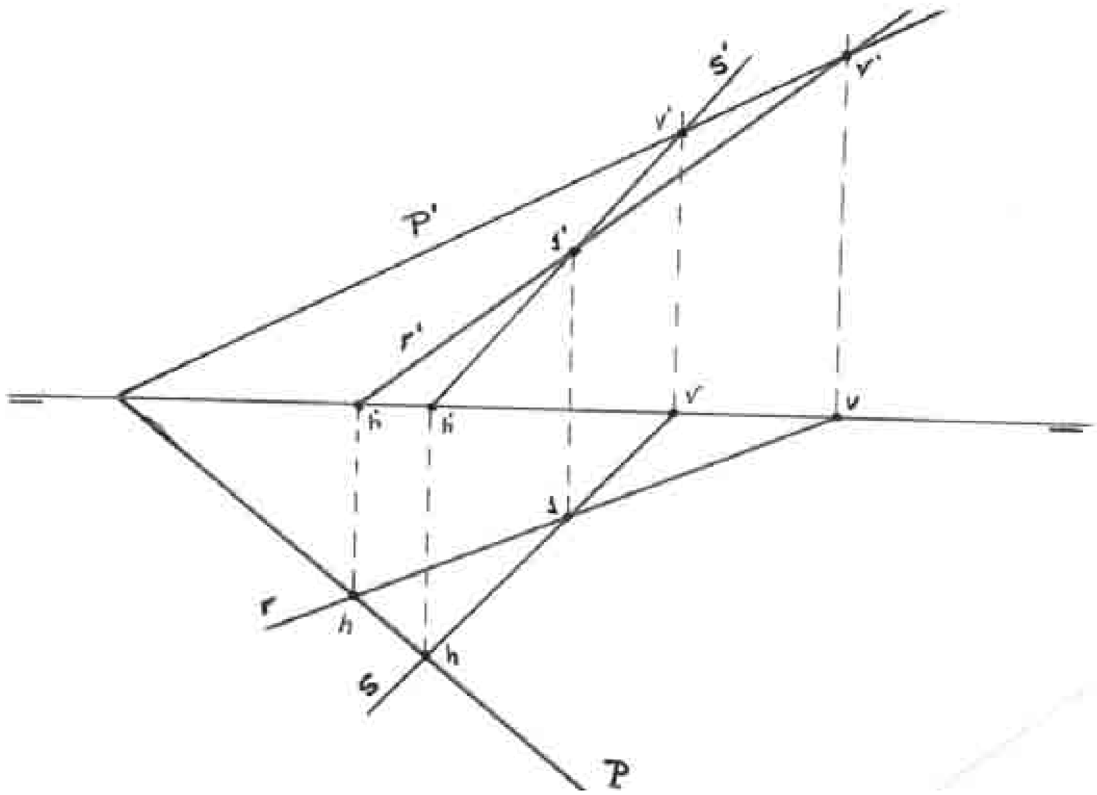


Fig. 24. Plano determinado por dos rectas R y S que se cortan.

Operaciones básicas en el plano.

Recta situada en un plano. (fig. 25)

Para que una recta esté contenida en un plano es preciso que sus trazas estén situadas sobre las correspondientes del plano.

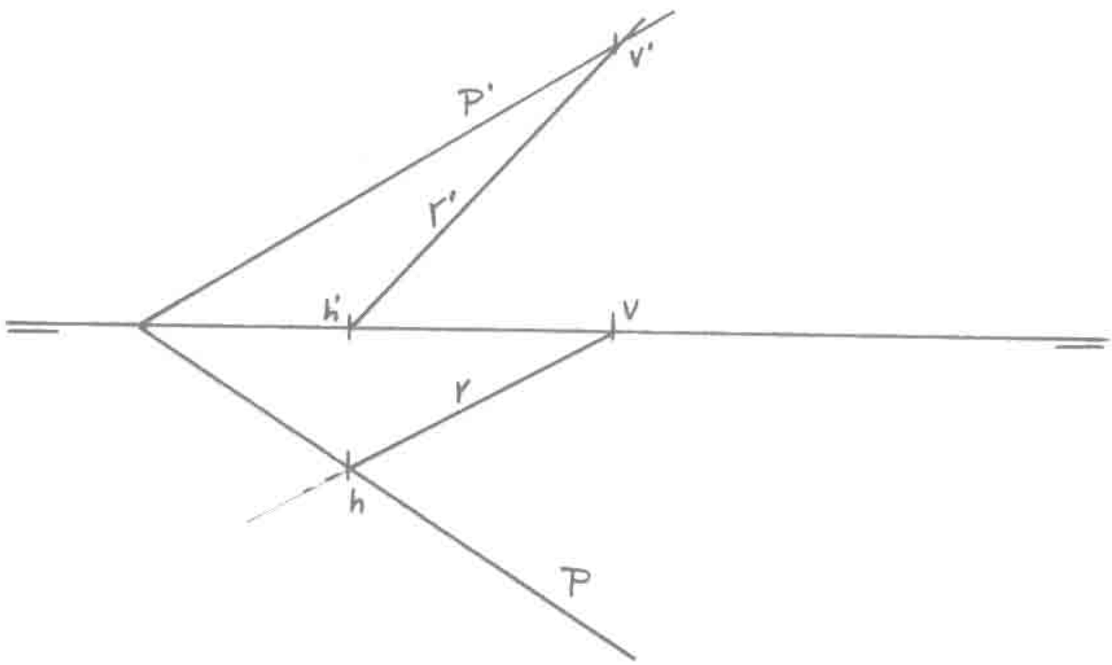


Fig. 25. Recta situada en un plano.

Punto situado sobre un plano. (fig. 26)

Un punto pertenece a un plano si está situado sobre una recta de ese plano.

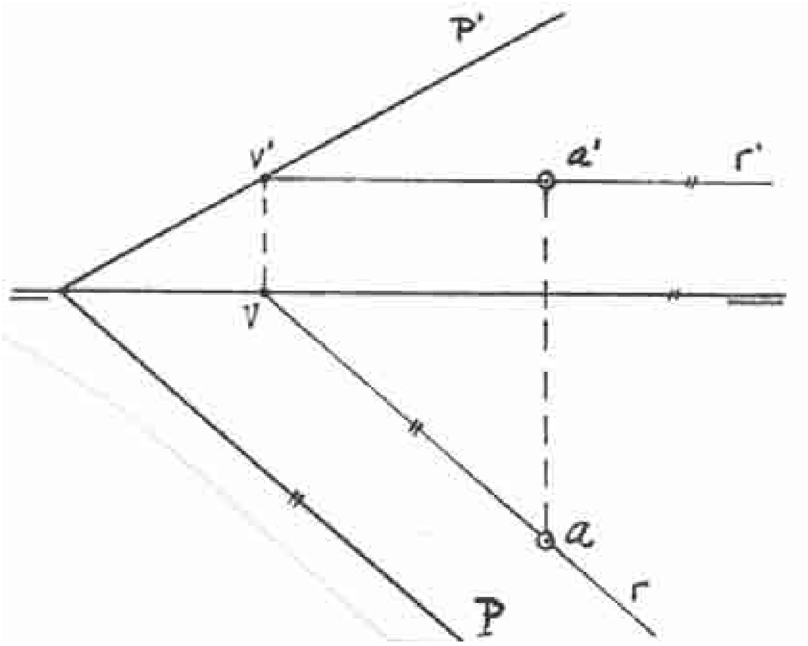


Fig. 26. Punto situado sobre un plano.

Rectas de máxima pendiente del plano. (fig. 27)

-Recta de máxima pendiente **m** respecto del horizontal: será aquella cuya proyección horizontal sea perpendicular a la traza horizontal del plano que la contiene.

-Recta de máxima pendiente $\mathbf{m_1}$ respecto del vertical ó recta de máxima inclinación del plano: será aquella cuya proyección vertical sea perpendicular a la traza vertical del plano que la contie-ne.

(vid. teorema de las tres perpendiculares)

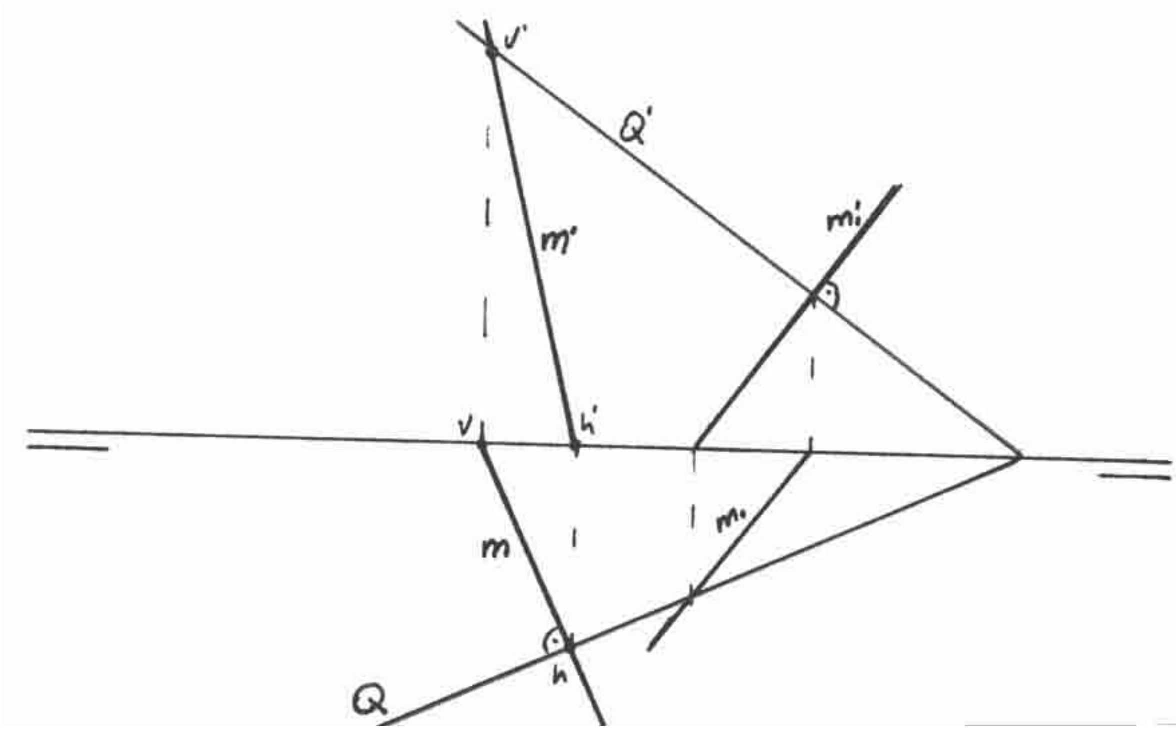
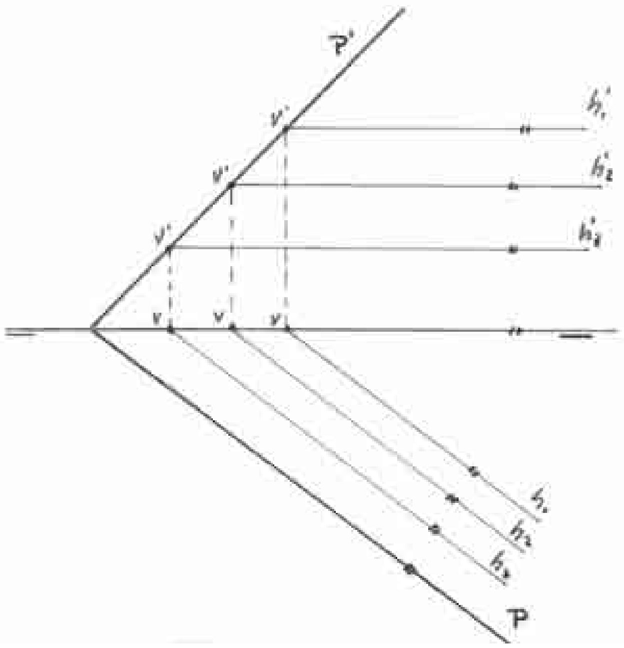


Fig. 27. Rectas de máxima pendiente del plano.

Horizontales y frontales del plano. (fig. 28)

Por desempeñar un papel importante en el manejo del plano se hace mención de sus rectas ho-rizontales y frontales.



-Las rectas horizontales tendrán su proyección horizontal paralela a la traza horizontal del plano y su proyección vertical paralela a la L.T.

-Las rectas frontales tendrán su proyección vertical paralela a la traza vertical del plano y su proyección horizontal paralela a la L.T.

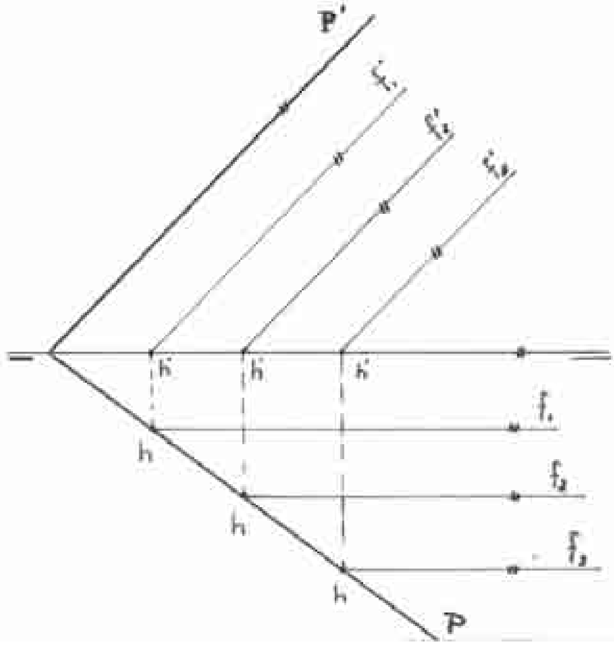


Fig. 28. Rectas horizontales y frontales del plano.

5. ALFABETO DEL PLANO.

Se denomina así a las posiciones relativas que puede ocupar un plano respecto a los de proyec-ción.

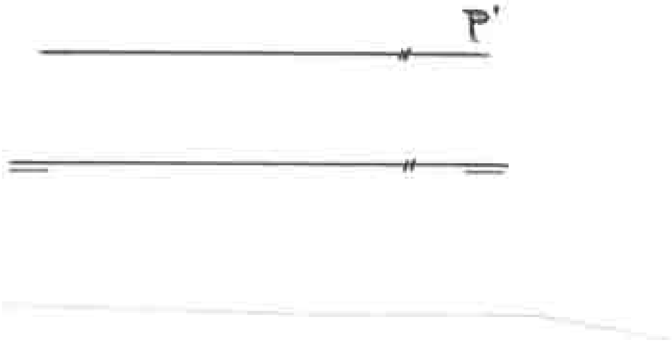


Fig. 29. Plano paralelo al horizontal.

Fig. 30. Plano paralelo al vertical.

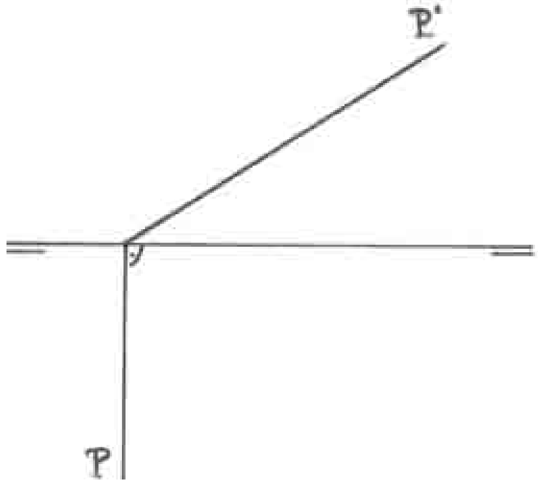


Fig. 31. Plano proyectante sobre el vertical.

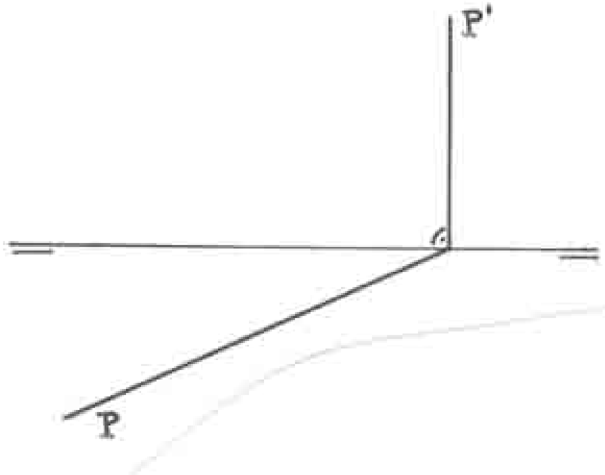


Fig. 32. Plano proyectante sobre el horizontal.

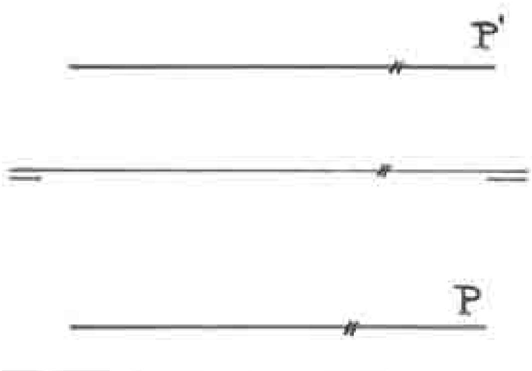


Fig. 33. Plano paralelo a la L.T.

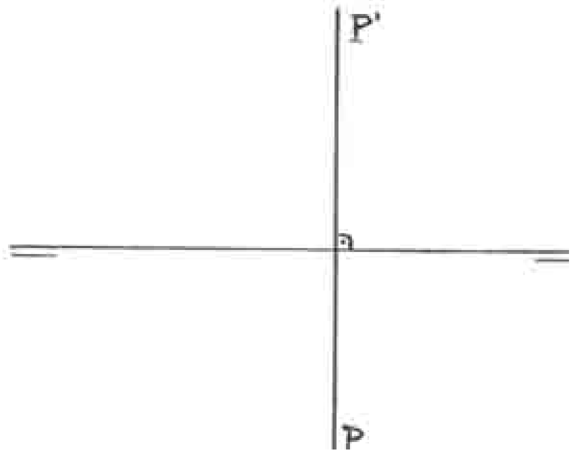


Fig. 34. Plano de perfil.

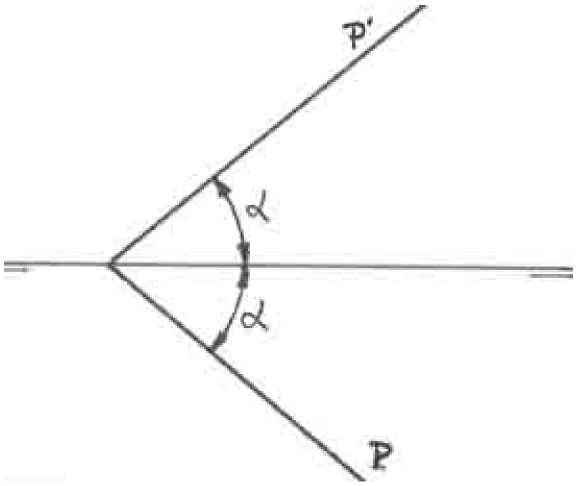


Fig. 35. Plano perpendicular al pimer bisector.

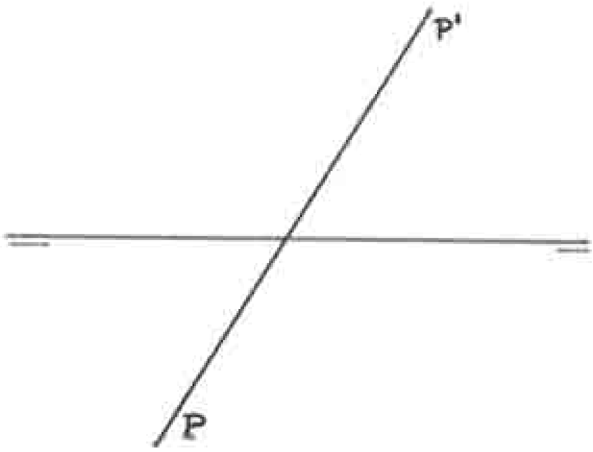


Fig. 36. Plano perpendicular al 2º bisector.

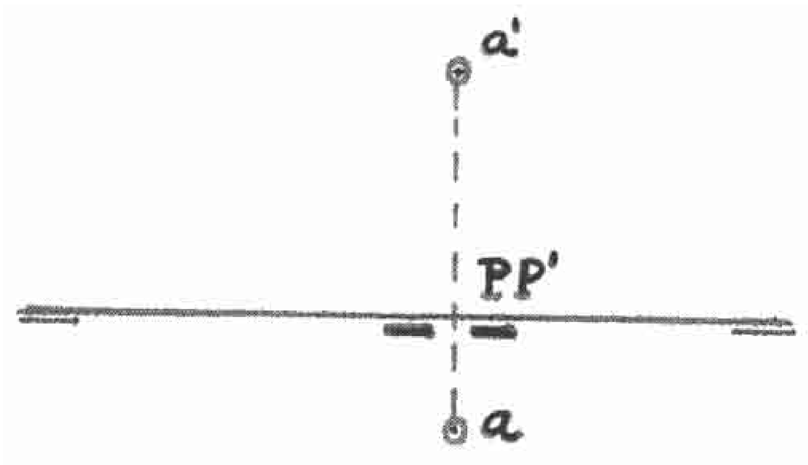


Fig. 37. Plano que pasa por la L.T.

Homología afín entre las proyecciones de una forma plana. (fig. 38)

Existe una homología afín entre la proyección vertical y la horizontal de una forma plana lo que permite, conocida la proyección horizontal, obtener la vertical y viceversa.

-dirección de la homología afín: perpendicular a la L.T.

-eje de la homología afín: recta del plano situada en el segundo bisector.

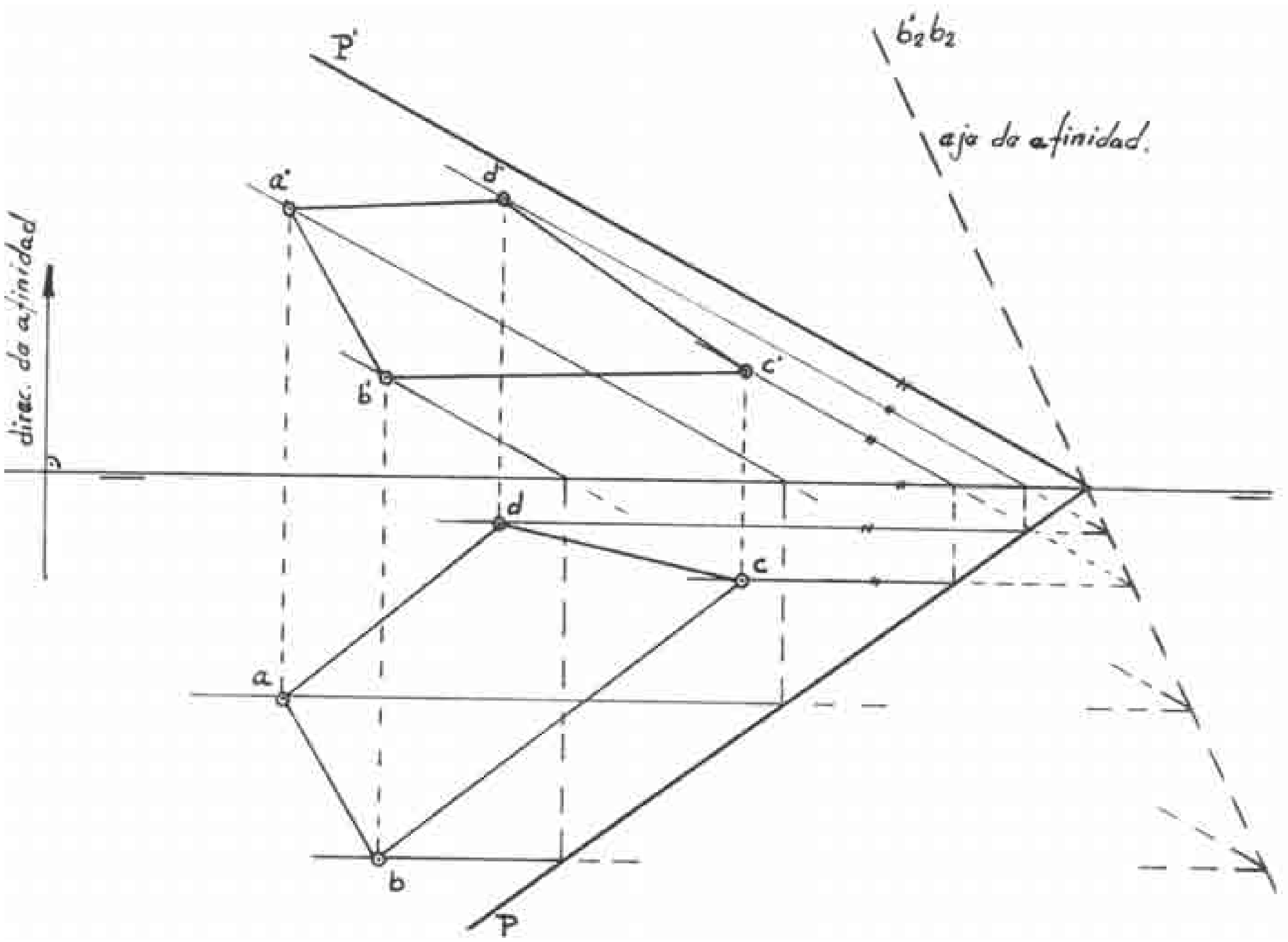


Fig. 38. Proyecciones de una forma plana: conocida una se obtiene la otra.

6. INTERSECCION DE PLANOS.

El procedimiento general (fig. 39) consiste en cortar los planos dados P y Q por dos planos auxiliares α_1 y α_2; aunque parezca paradójico ello va a permitir encontrar la recta intersección de los planos P y Q.

Se procederá de la siguiente manera:

-Se determinan las rectas de intersección, $I\alpha_1 p$ é $I\alpha_1 q$, del plano α_1 con los planos P y Q; tales rectas se cortarán en el punto A de la intersección buscada.

-Se determinan las rectas de intersección, $I\alpha_2 p$ é $I\alpha_2 q$, del plano α_2 con los planos P y Q; tales rectas se cortarán en el punto B de la intersección buscada.

-Los puntos A y B determinan la recta de intersección I buscada.

La paradoja antes citada desaparece al elegir convenientemente los planos α_1 y α_2.

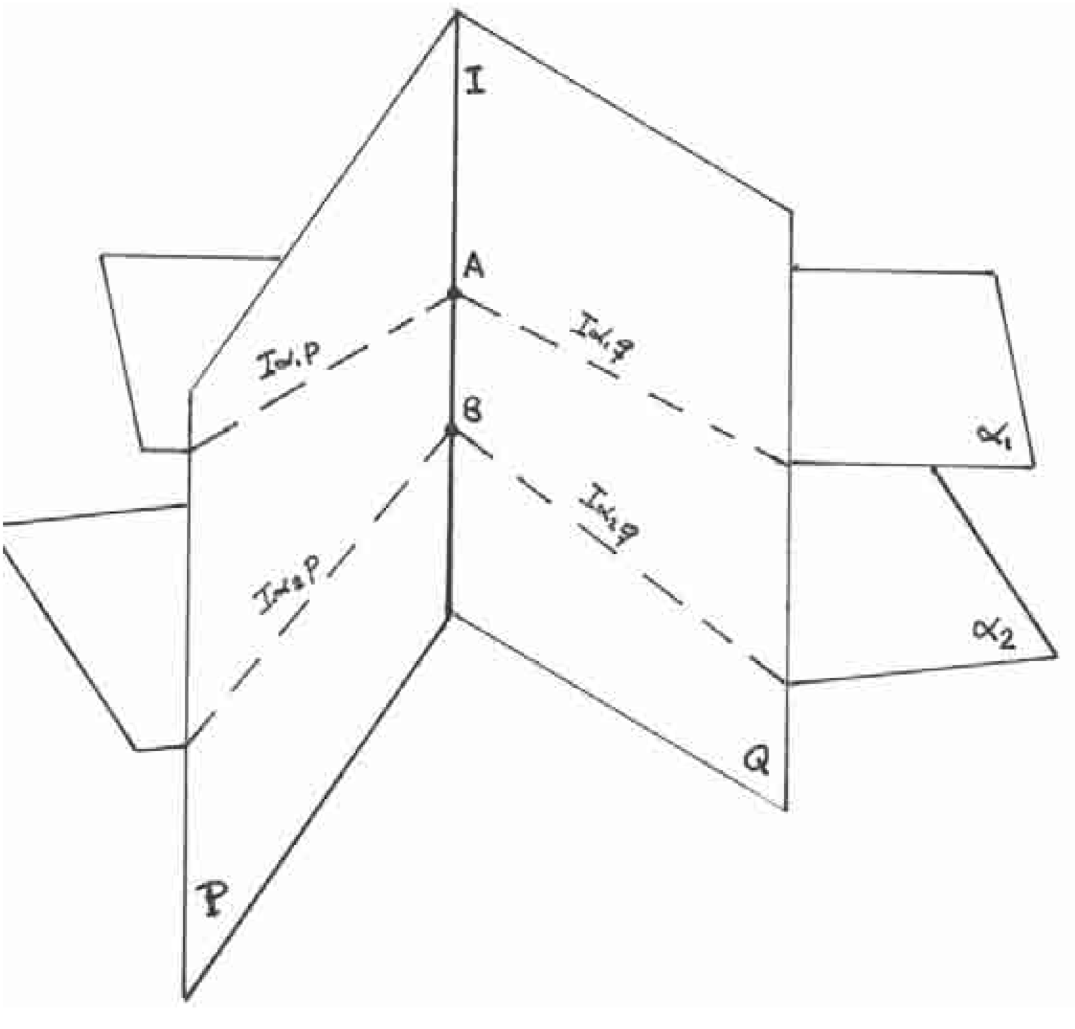


Fig. 39. Intersección de planos.

En este Sistema se tomarán como planos auxiliares, siempre que sea posible y por este orden,

1º. Los planos de proyección.
2º. Planos paralelos a los de proyección.
3º. Planos cualesquiera.

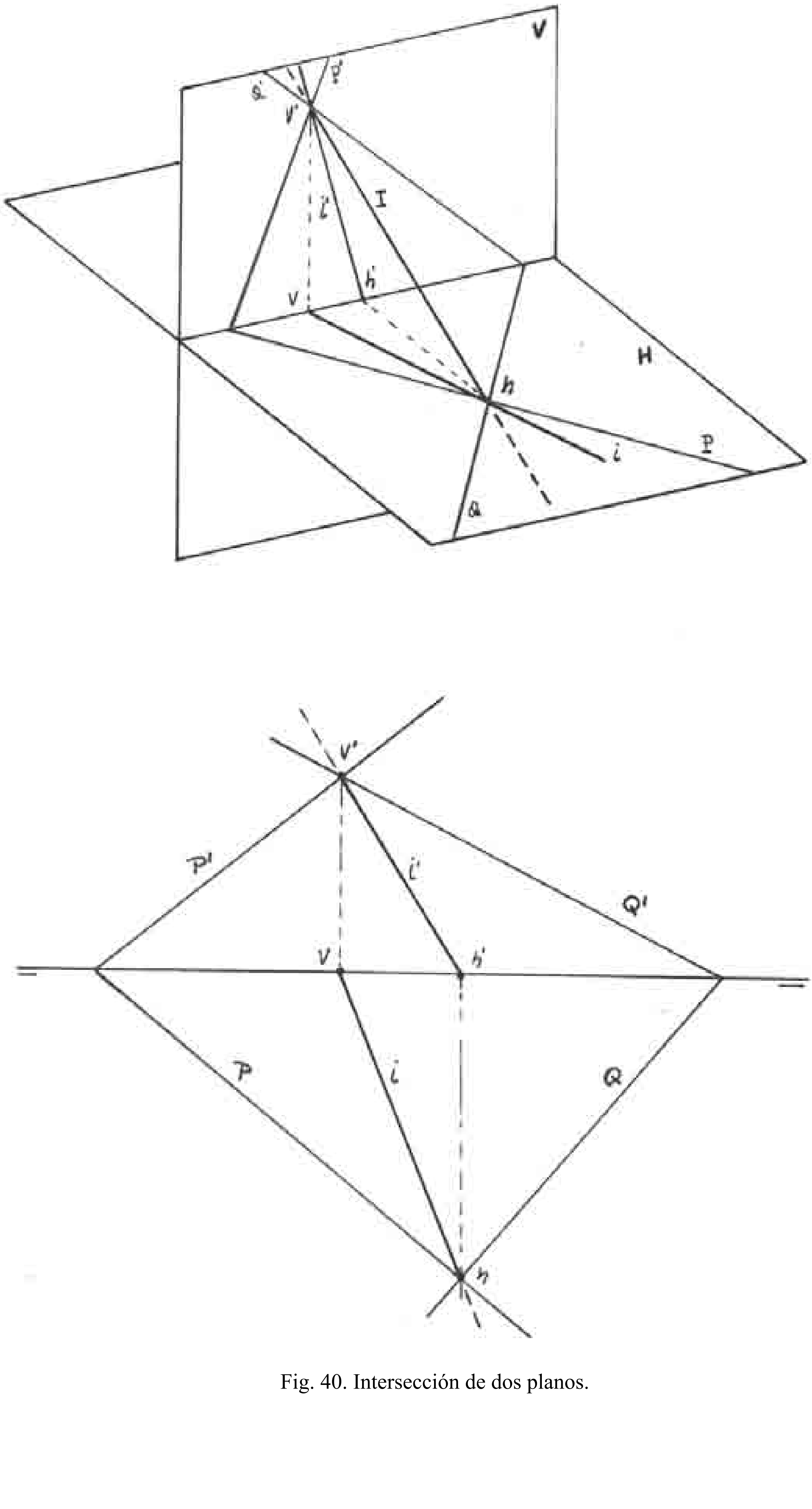


Fig. 40. Intersección de dos planos.

Planos cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.

Sean los planos P y Q cuyas trazas no se cortan dentro de los límites del papel de dibujo (fig. 41 y fig. 42); para obtener su intersección se tomarán planos auxiliares α_1 y α_2 paralelos al horizontal y al vertical de proyección: las rectas de intersección de estos planos con los dados serán hori-zontales y frontales, respectivamente, y permitirán determinar la recta de intersección buscada.

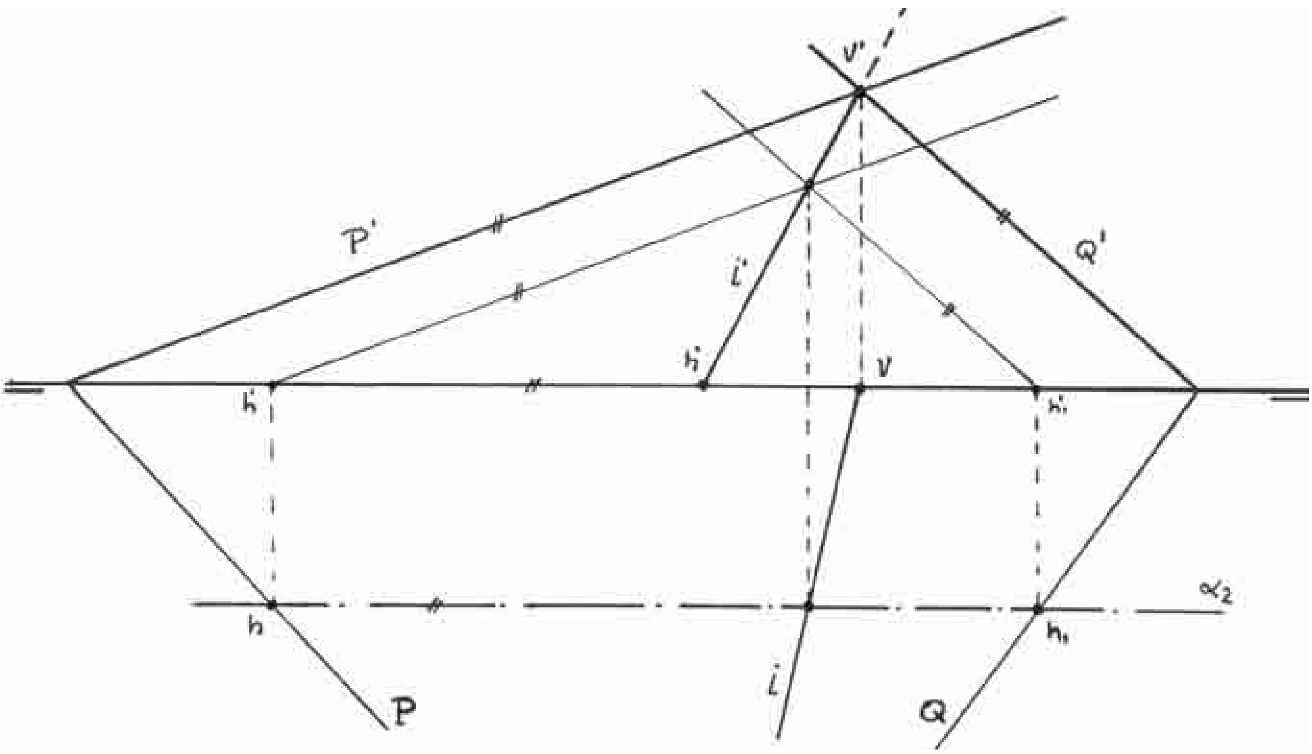


Fig. 41. Intersección de dos planos P y Q cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.

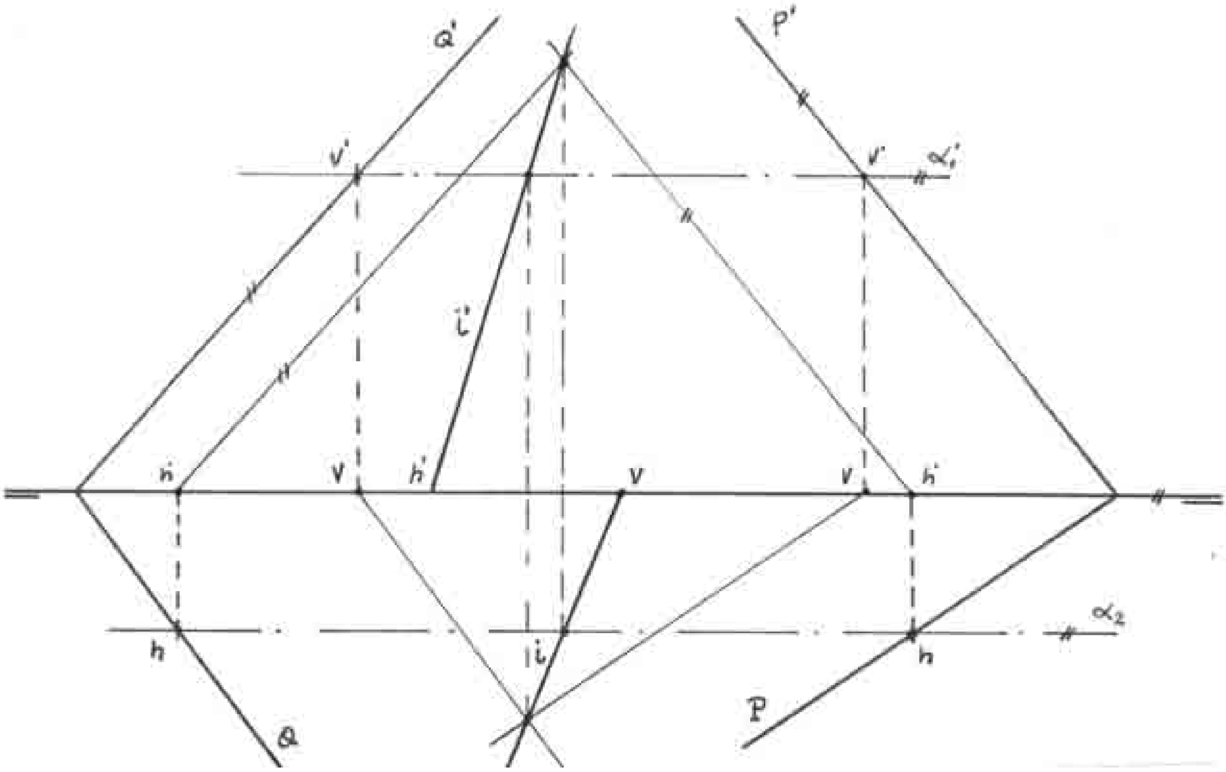


Fig. 42. Intersección de dos planos P y Q cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.

En la fig. 43 se ha tomado como plano auxiliar α_1 un plano paralelo a uno de los dados y el otro plano auxiliar α_2 paralelo al vertical.

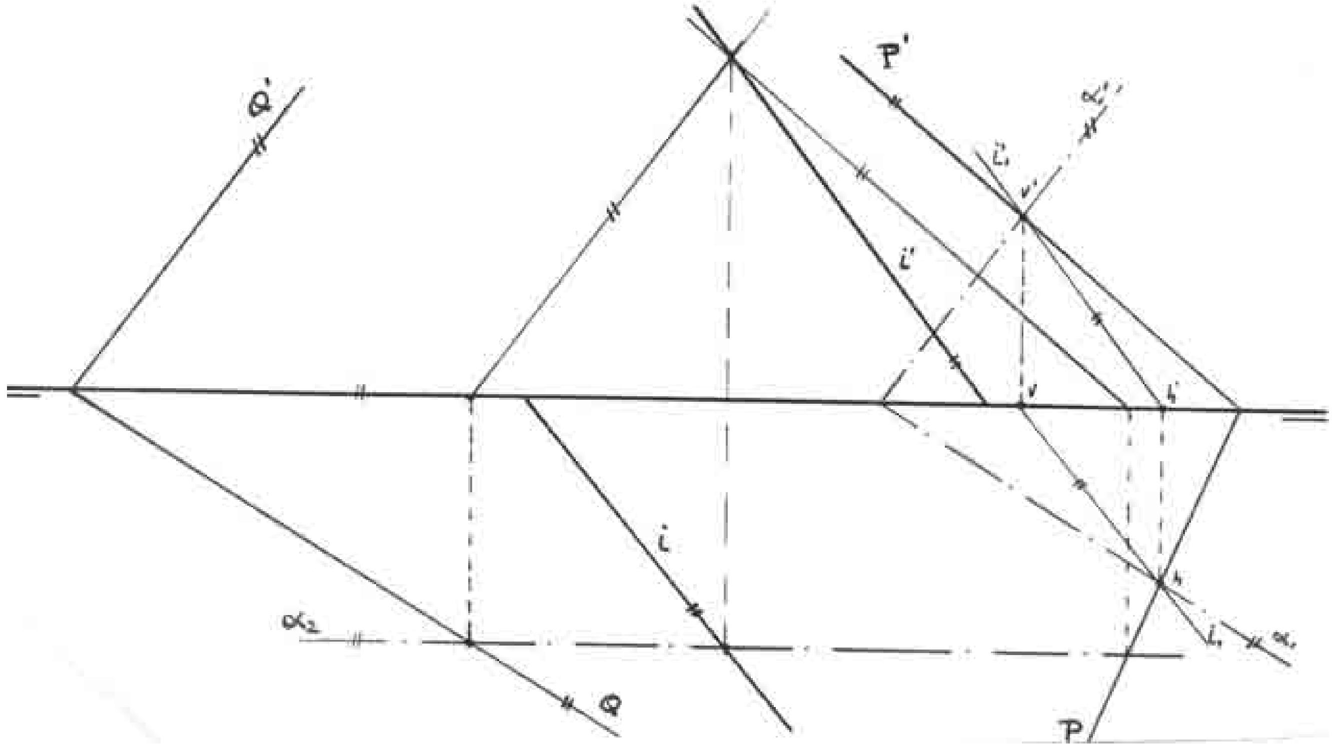
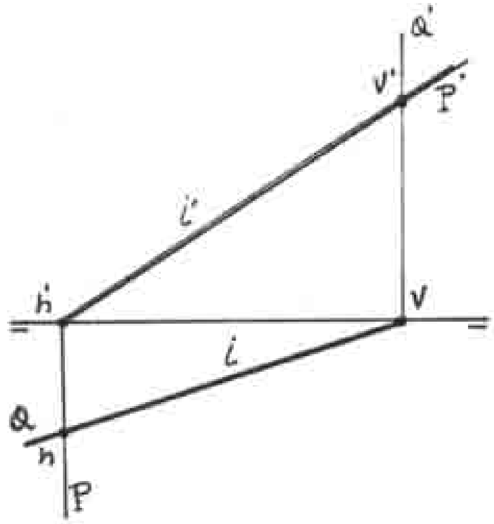


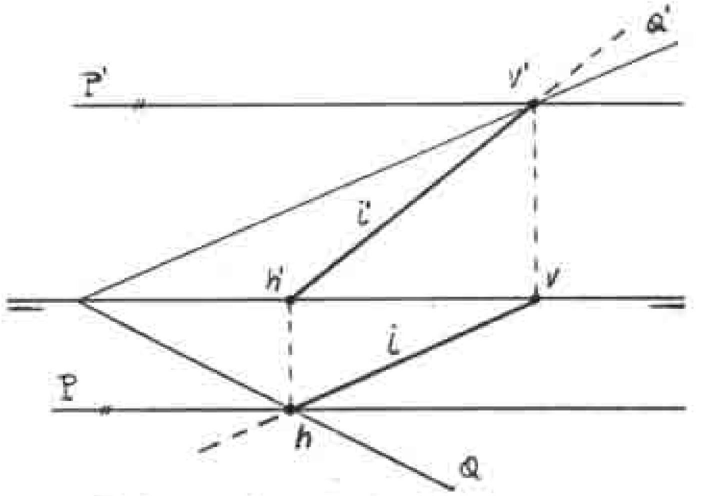
Fig. 43. Intersección de dos planos P y Q cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.

En las figuras aparecen, con toda claridad, las operaciones necesarias para determinar la intersección buscada; huelga cualquier explicación adicional.

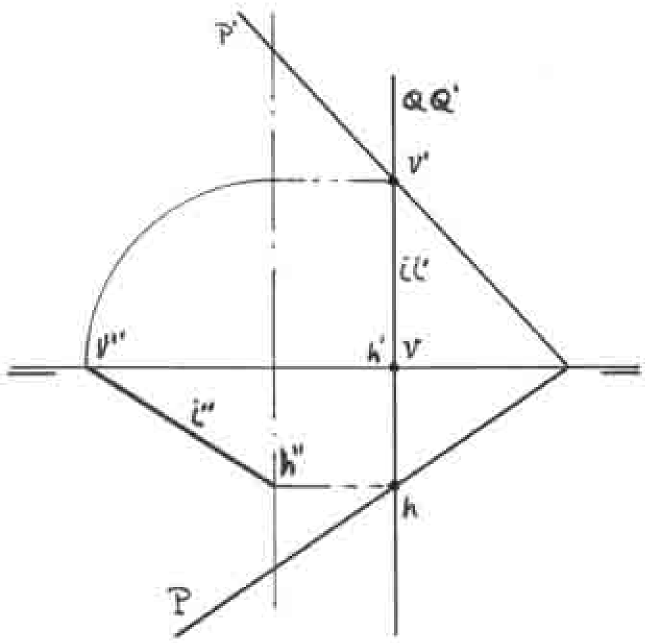
Algunos ejemplos de intersección de planos.



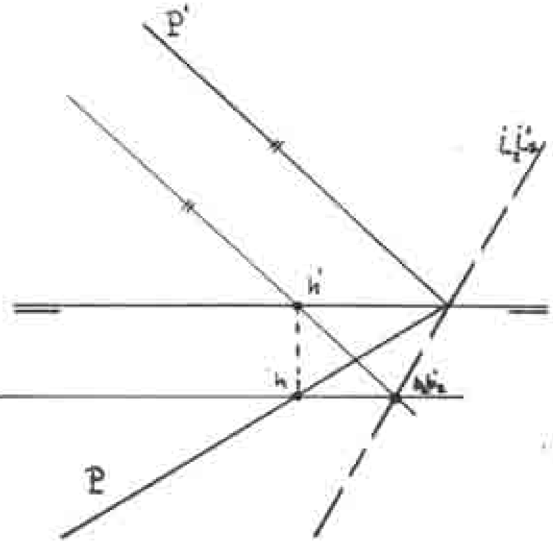
Intersección de
dos planos proyectantes.



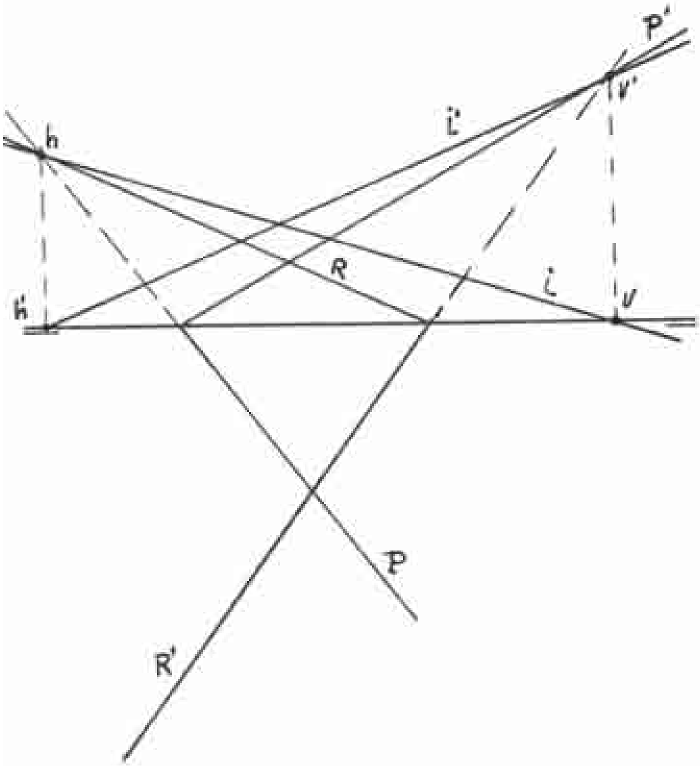
Inters. de un plano paraleào
a la L.T. con otro cualquiera.



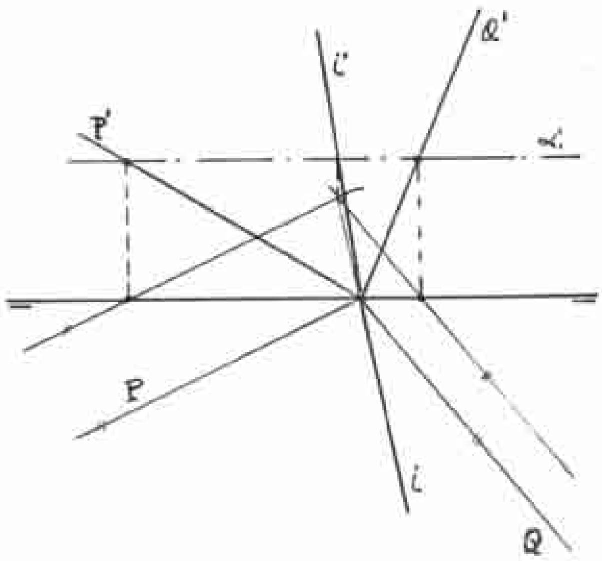
Inters. de un plano cualquiera
con un plano de perfil.



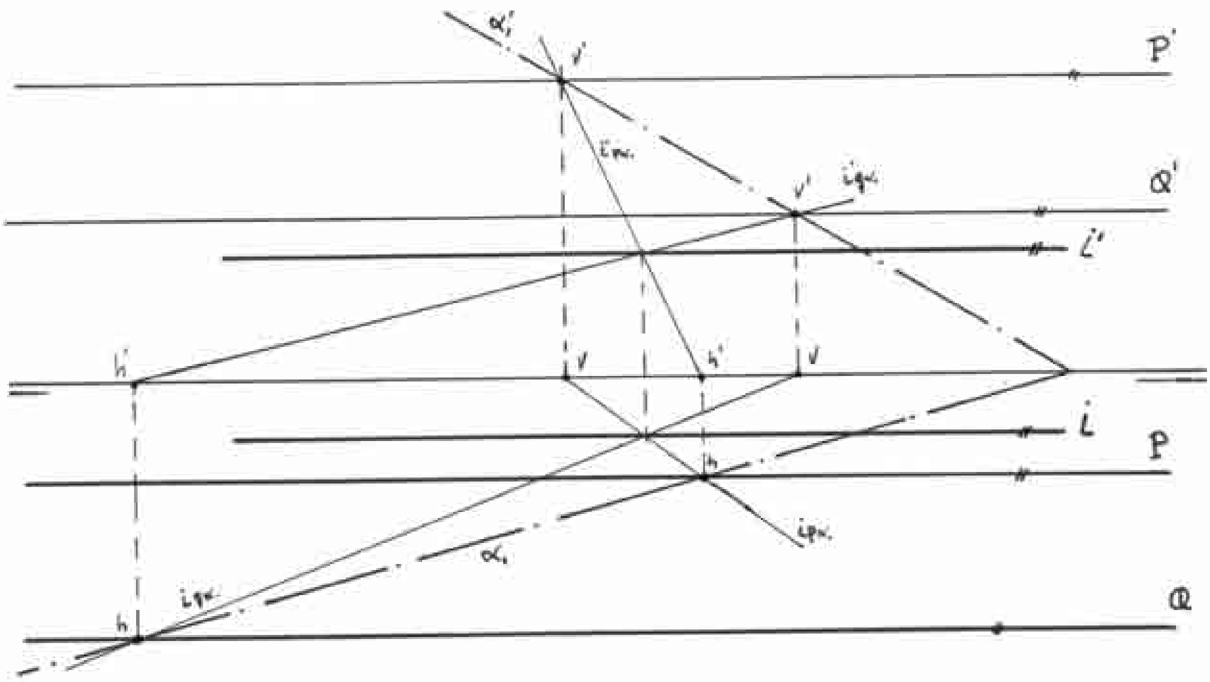
Inters. de un plano cualquiera
con el 2º bisector.



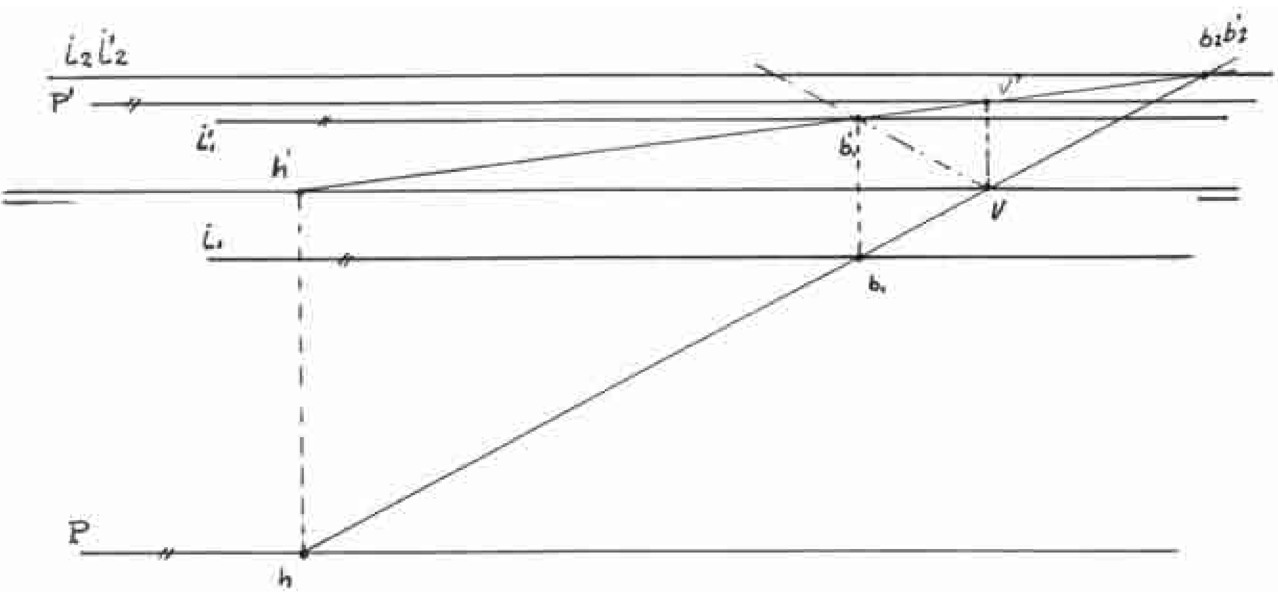
Inters. de los planos PP' y RR'.



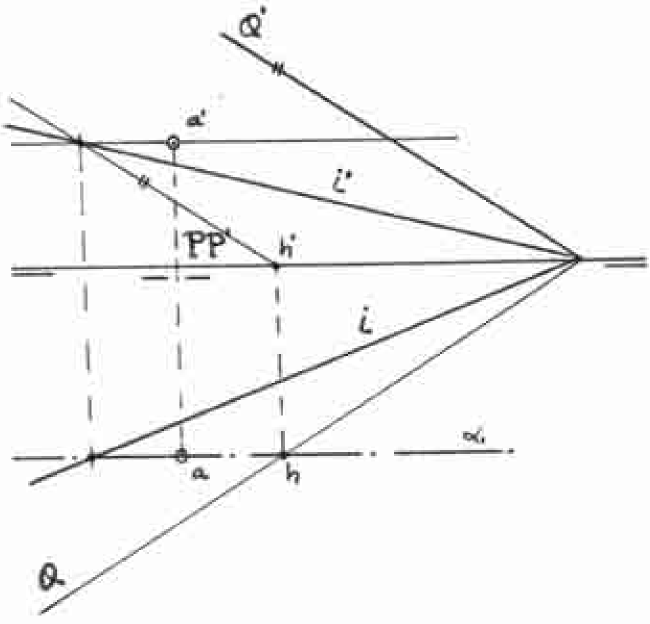
Inters. de dos planos que pasan por el mismo punto de la L.T.



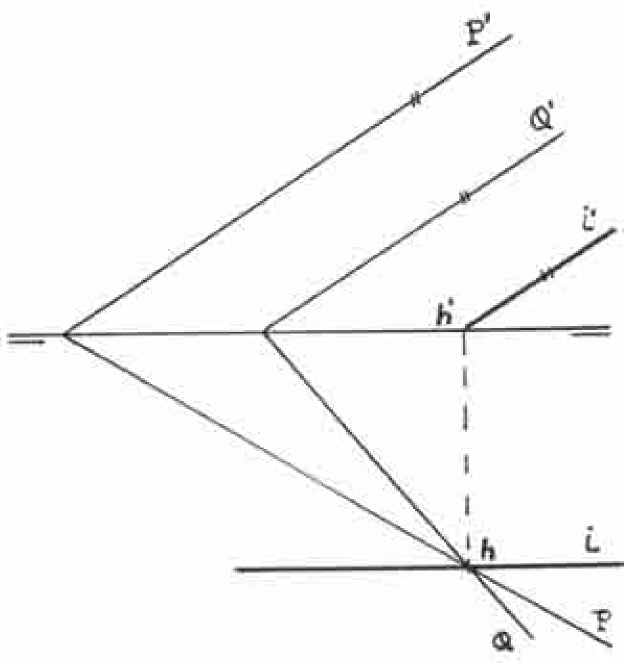
Intersección de dos planos paralelos a la L.T.



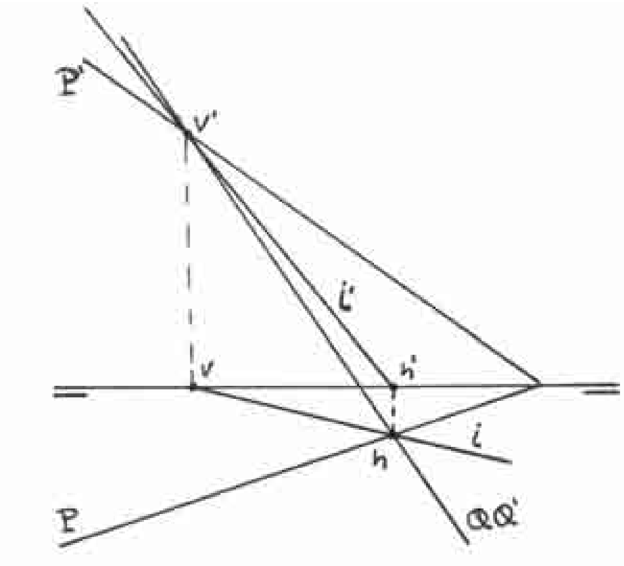
Intersección de un plano paralelo a la L.T. con el 1º y 2º bisector.



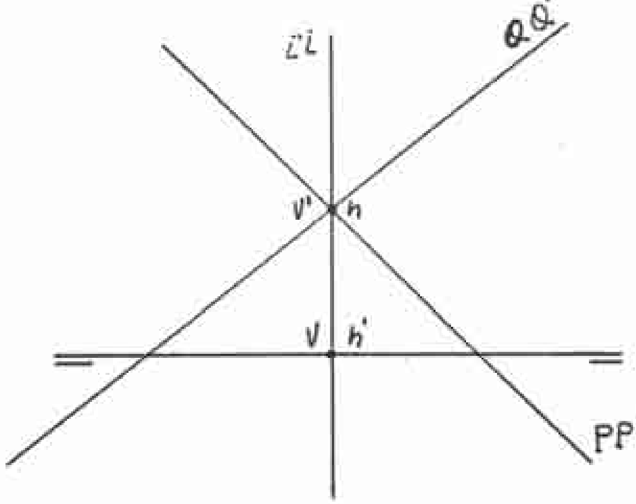
Inters. de un plano cualquiera con otro que pasa por la L.T.



Inters. de dos planos con trazas homónimas paralelas.



Inters. de un plano cualquiera con otro perpend. al 2º bisector.



Inters. de dos planos perpendiculares al 2º bisector.

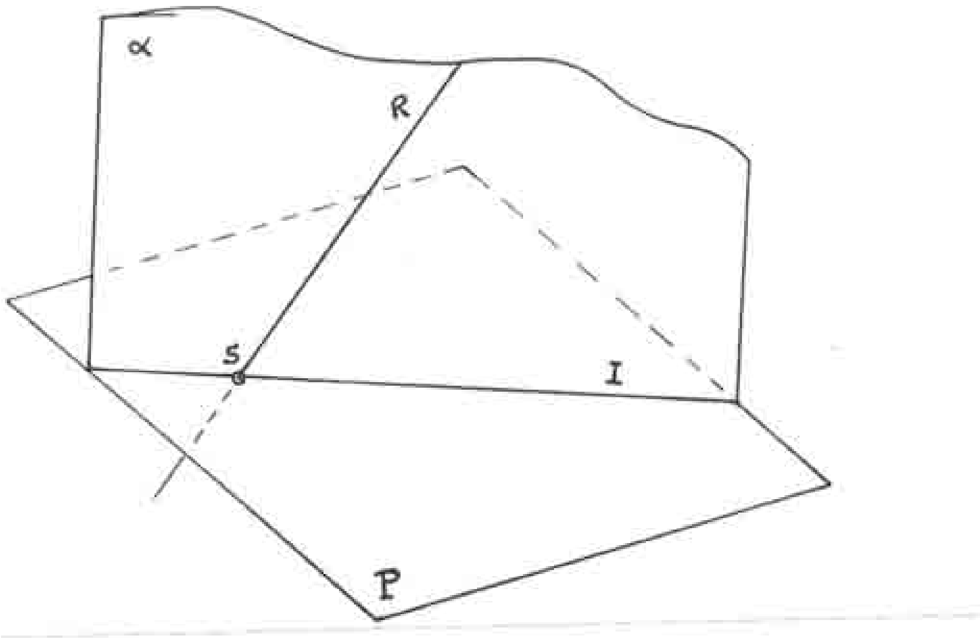
7. INTERSECCION DE RECTA Y PLANO.

Procedimiento general:

-Se hace pasar por la recta R un plano cualquiera α.

-La intersección del plano α con el plano dado P será la recta I.

-El punto de corte de la recta I con la recta dada R será el punto de intersección buscado: punto S.



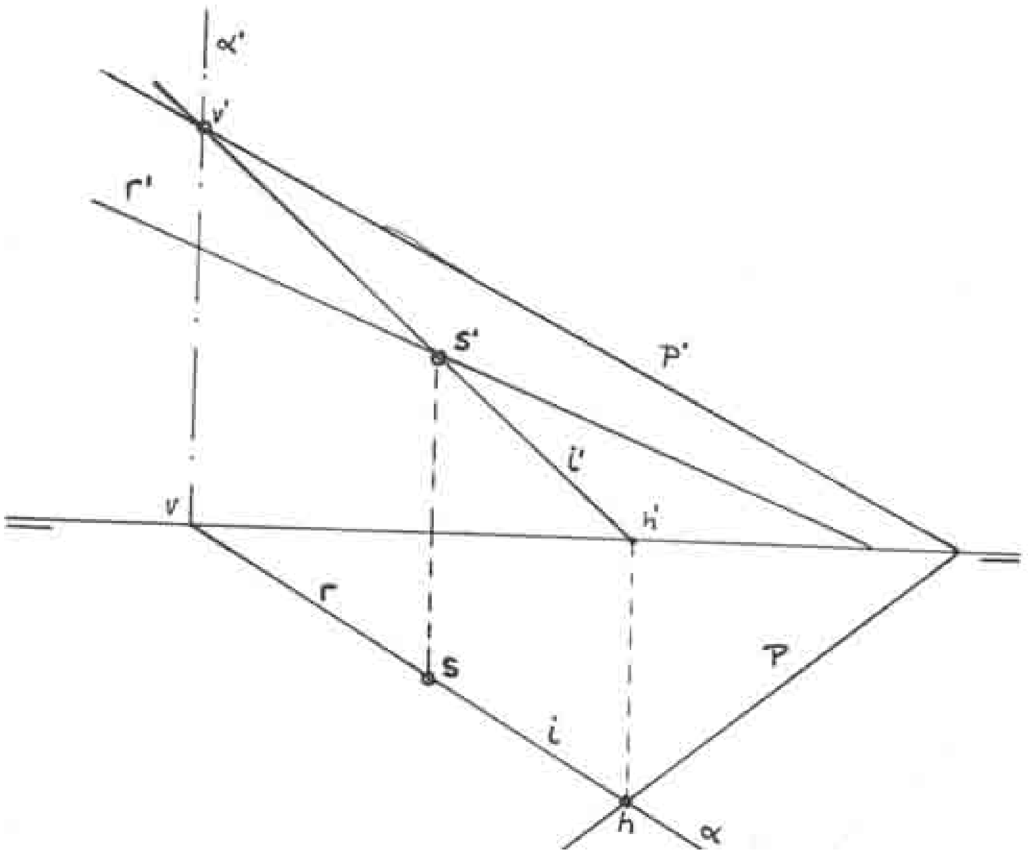


Fig. 44. Intersección de la recta R y el plano P.

Recta que corta ó se apoya en otras tres rectas que se cruzan. (fig. 44.1)

El problema tiene, siempre, infinitas soluciones salvo que se tome un punto sobre una de las rectas.

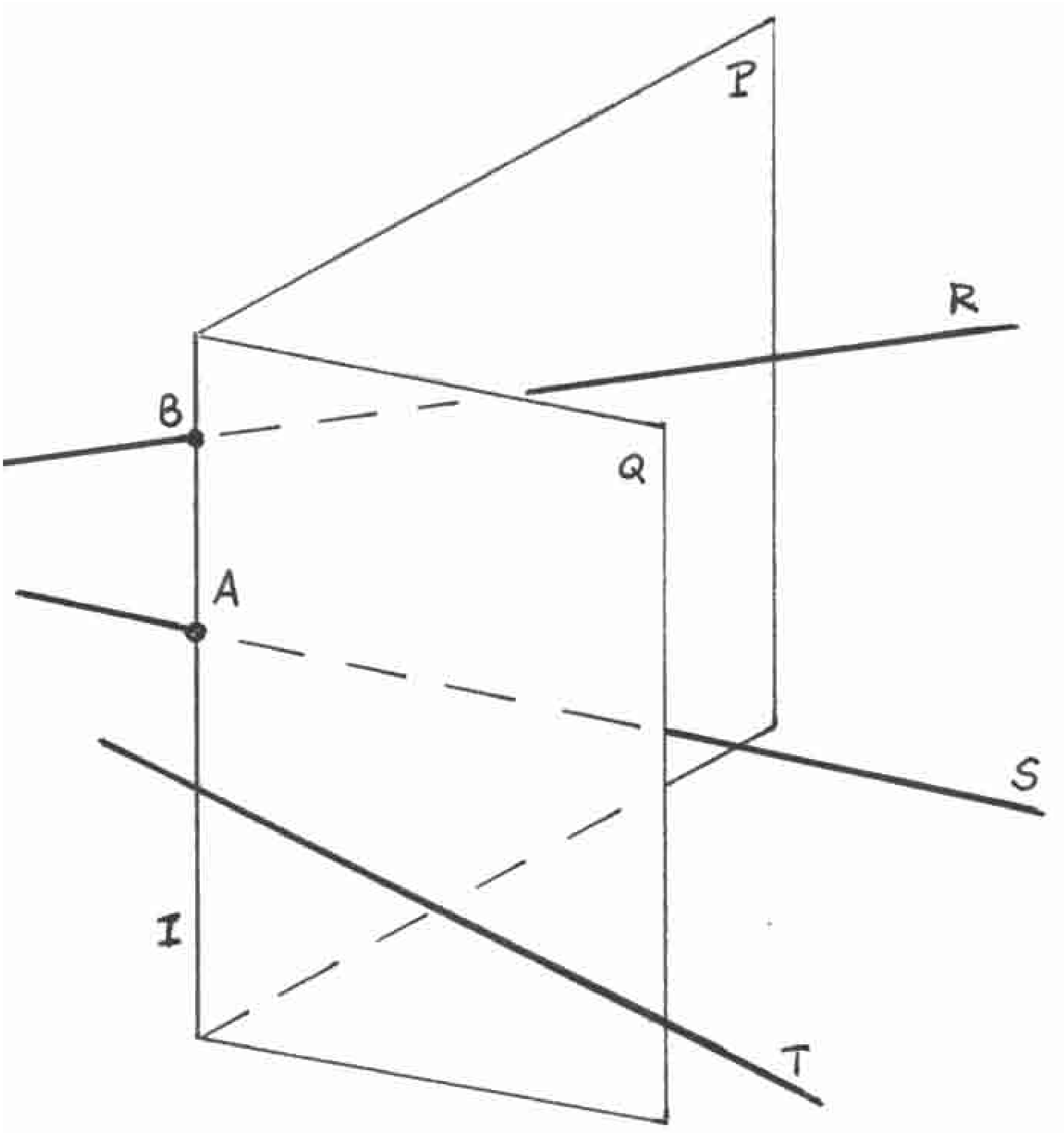


Fig. 44.1. Recta que corta a otras tres que se cruzan.

La recta buscada podrá encontrarse mediante dos procedimientos:

1. Por intersección de planos.

1.1. Se toma un punto A sobre una de las rectas.

1.2. Se determinan los planos formados por el punto A y cada una de las otras dos rectas R y T: planos P y Q respectivamente.

1.3. La intersección de los planos P y Q será la recta buscada.

2. Por intersección de recta y plano.

2.1. Se determina el plano formado por el punto A y una de las rectas: plano Q.

2.2. Se determina la intersección de la otra recta y el plano Q: punto B.

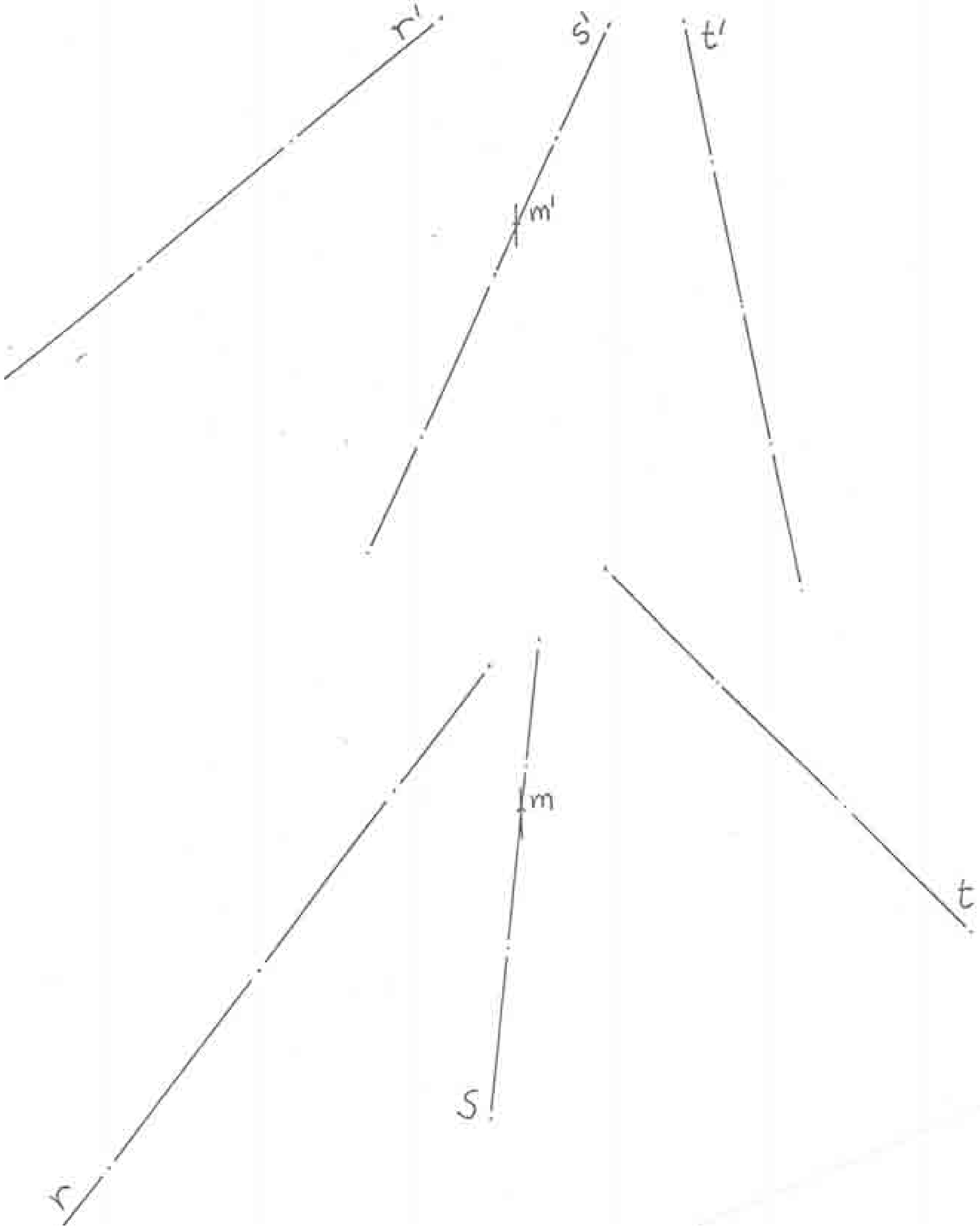
2.3. La recta determinada por el punto B y el punto A será la recta buscada.

Ejemplo.

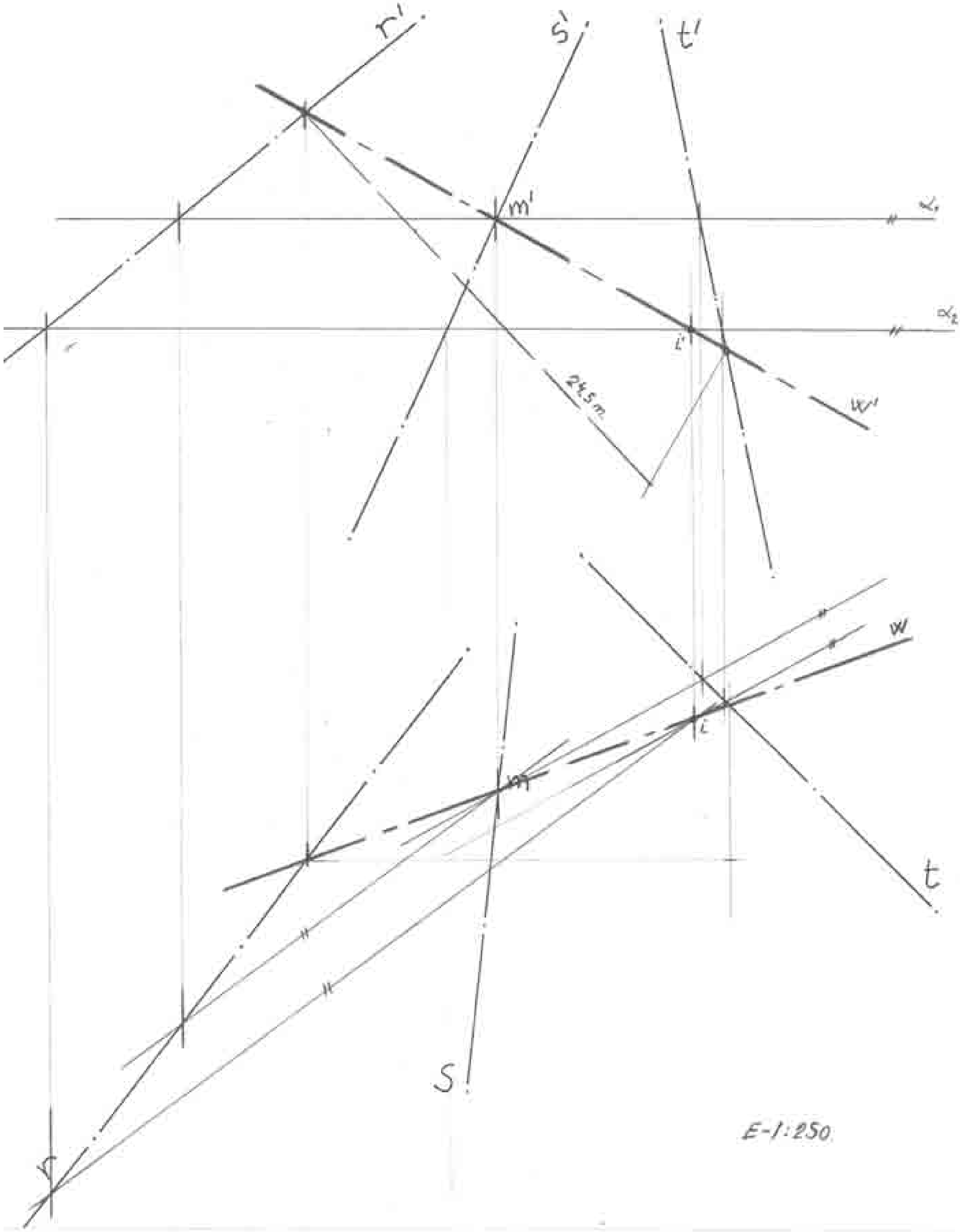
Las rectas R, S y T representan los ejes de tres tuberías que hay que unir, entre sí, mediante otra tubería rectilínea W que pasa por el punto M.

Determinar las proyecciones de la tubería W y su longitud.

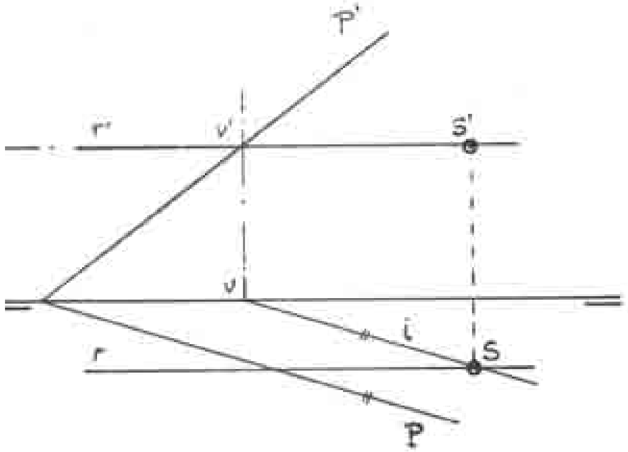
E-1:250.



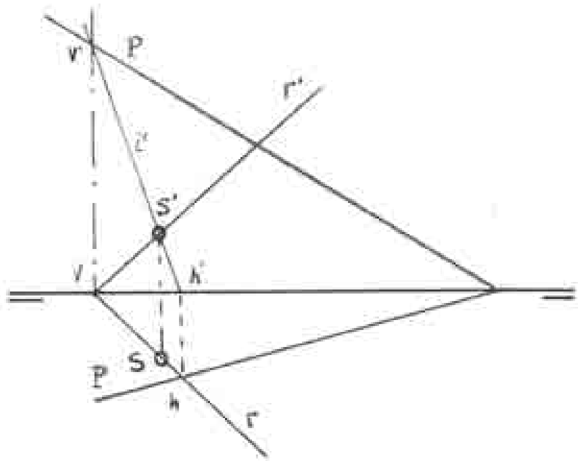
Solución.



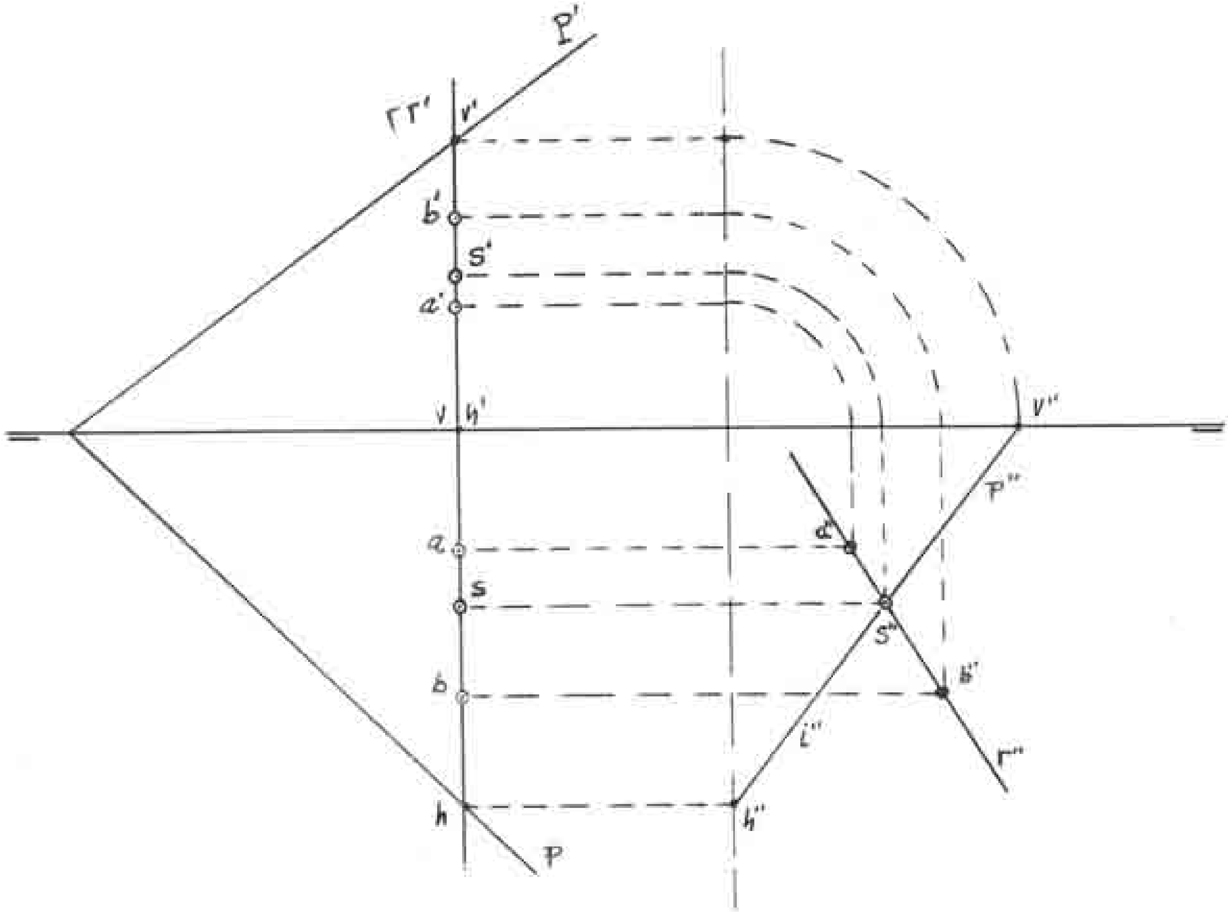
Algunos ejemplos de intersección de recta y plano.



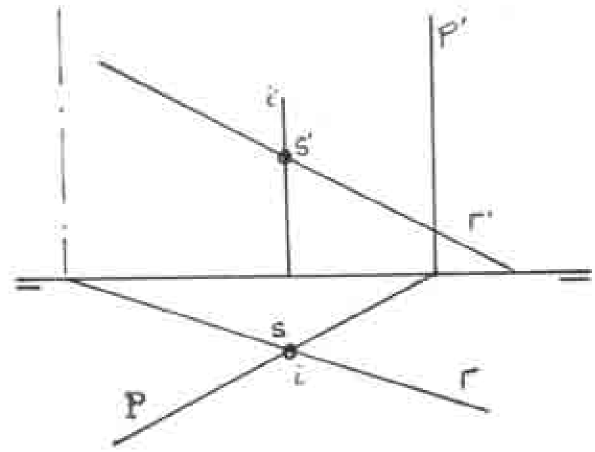
Intersección de un plano con una recta paralela a la L.T.

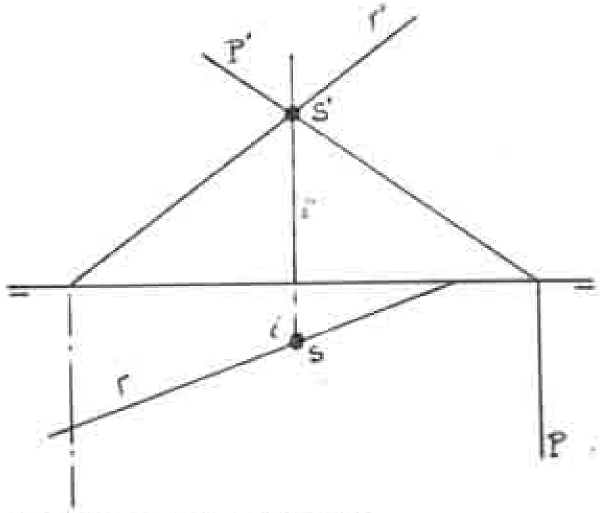


Intersección de un plano con una recta que pasa por la L.T

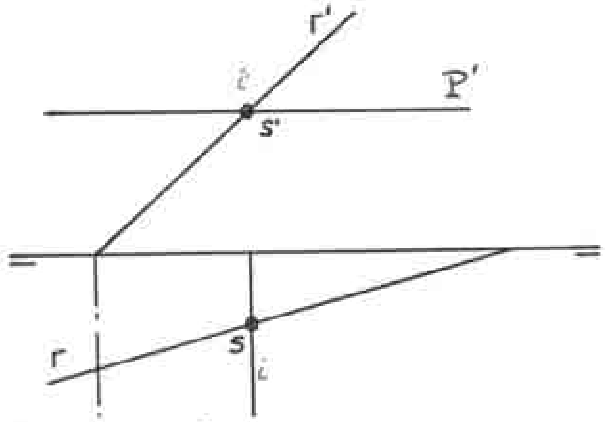


Intersección de un plano con una recta de perfil.

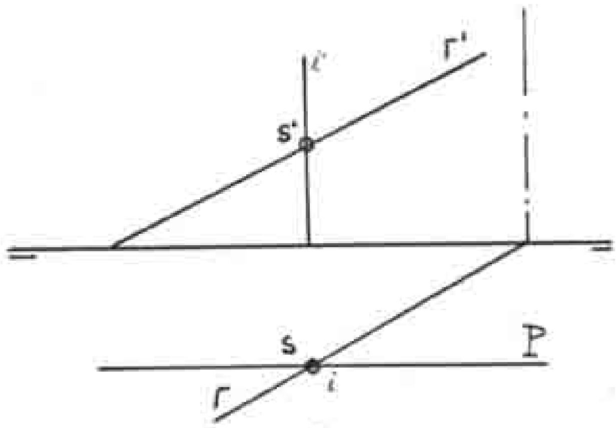




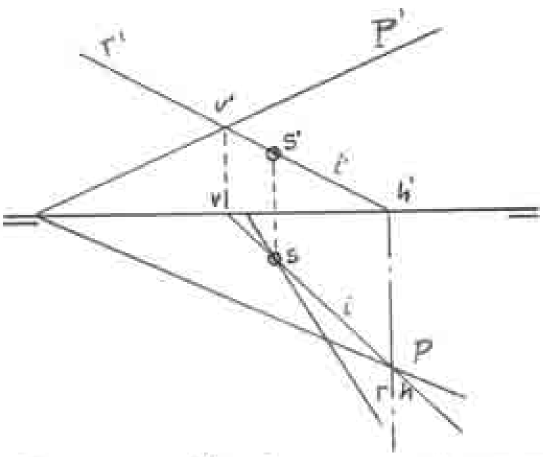
Intersección de una recta y un plano proyectante.



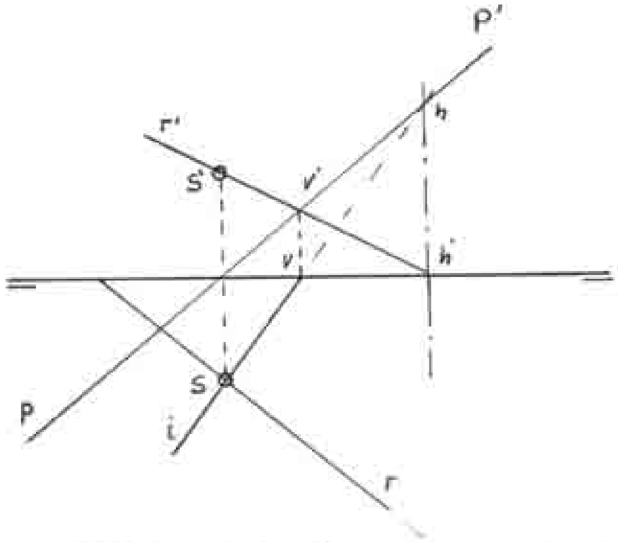
Intersección de una recta y
un plano paralelo al Horizontal.



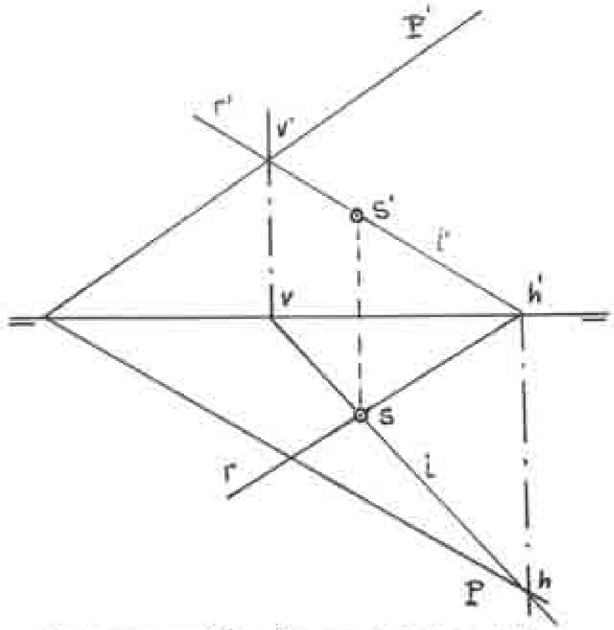
Intersección de una recta y
un plano paralelo al Vertical.



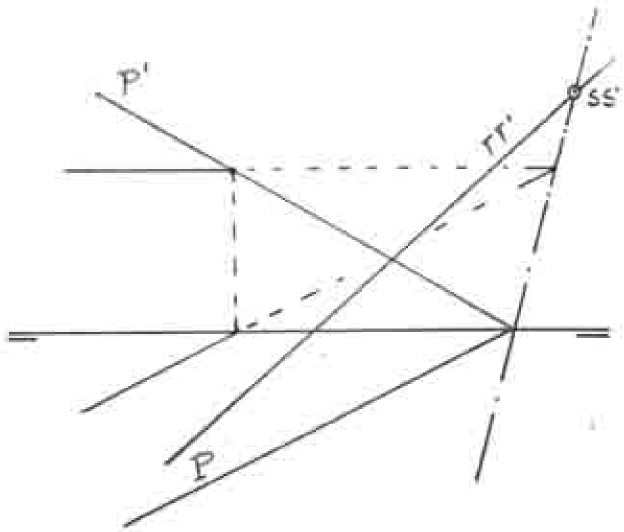
Intersección de una recta y un
plano perpendicular al 1º bisector.



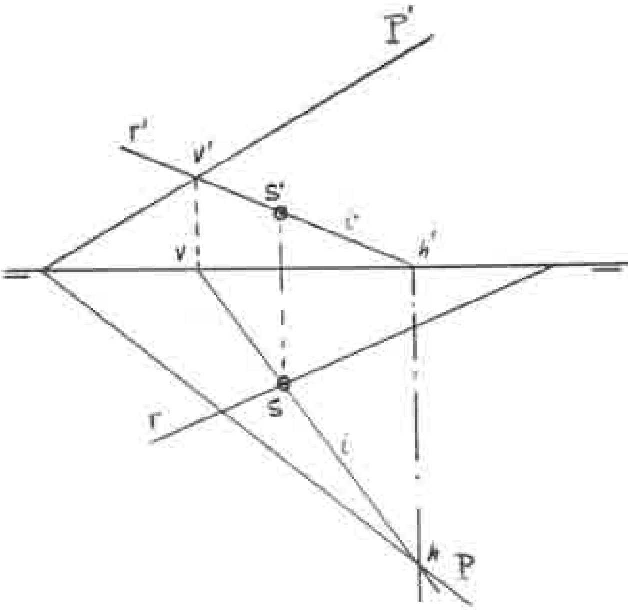
Intersección de una recta y un
plano perpendicular al 2º bisector



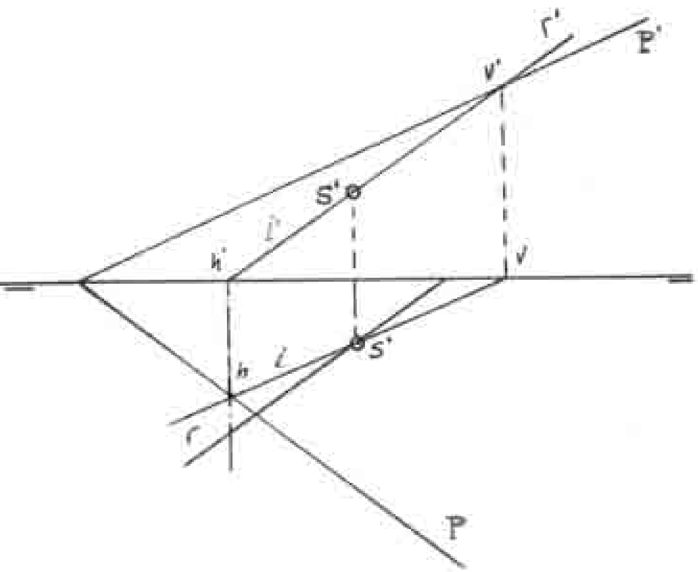
Intersección de un plano con una recta del 1º bisector.



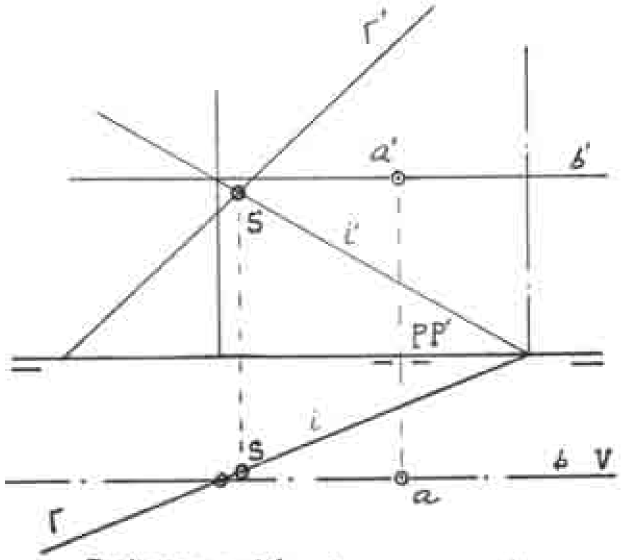
Intersección de un plano con una recta del 2º bisector.



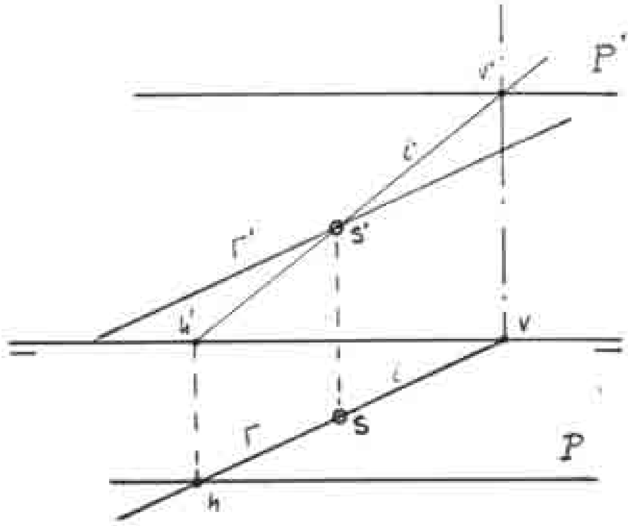
Intersección de un plano con una recta paralela al 1º bisector.



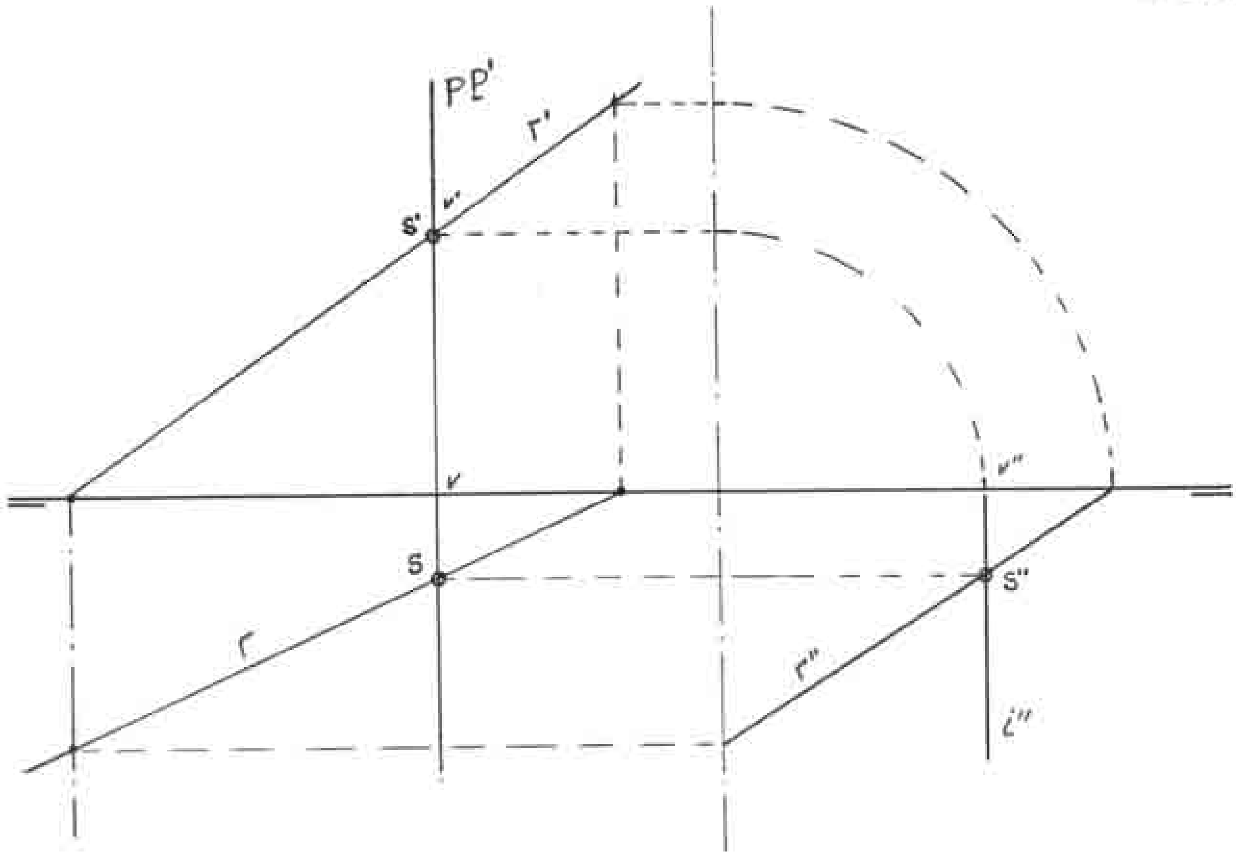
Intersección de un plano con una recta paralela al 2º bisector.



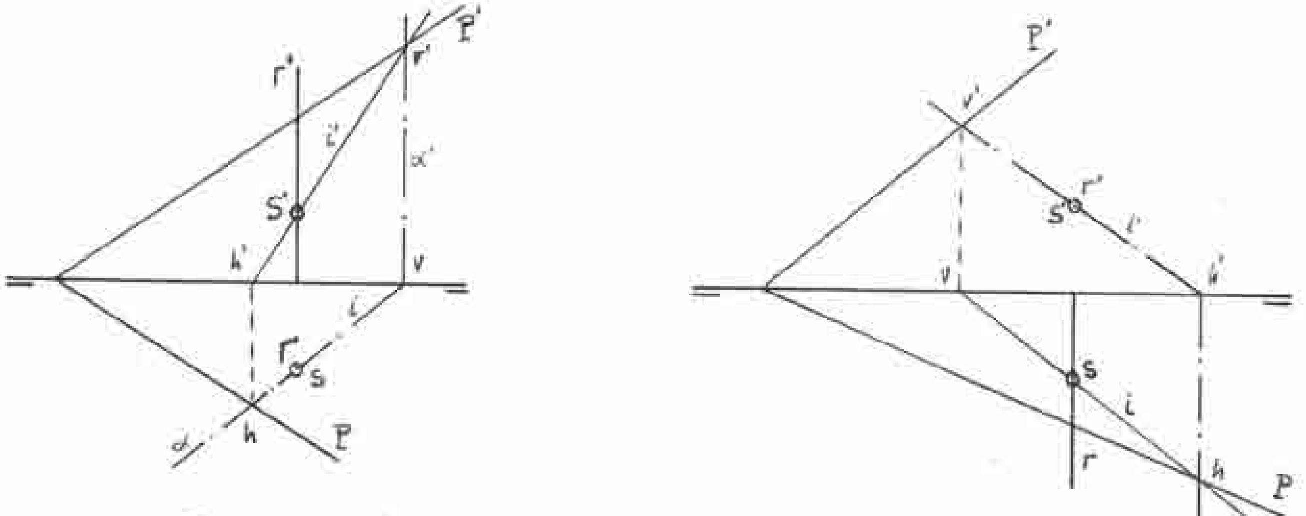
Intersección de una recta y
un plano que pasa por la L.T.



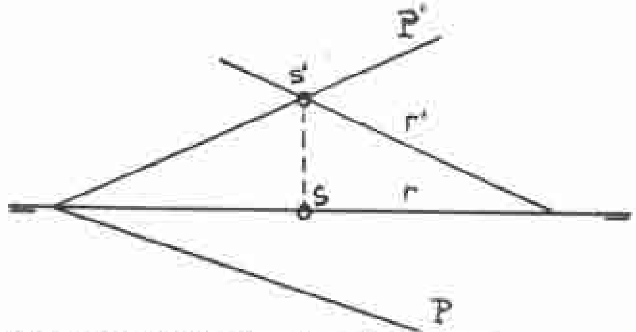
Intersección de una recta y
un plano paralelo a la L.T.



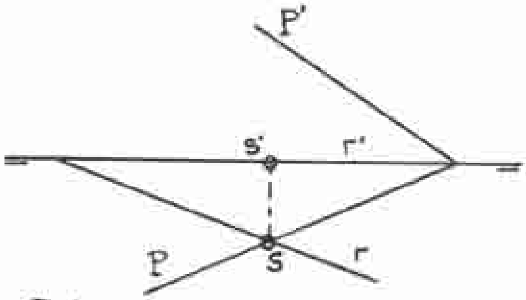
Intersección de una recta y un plano de perfil.



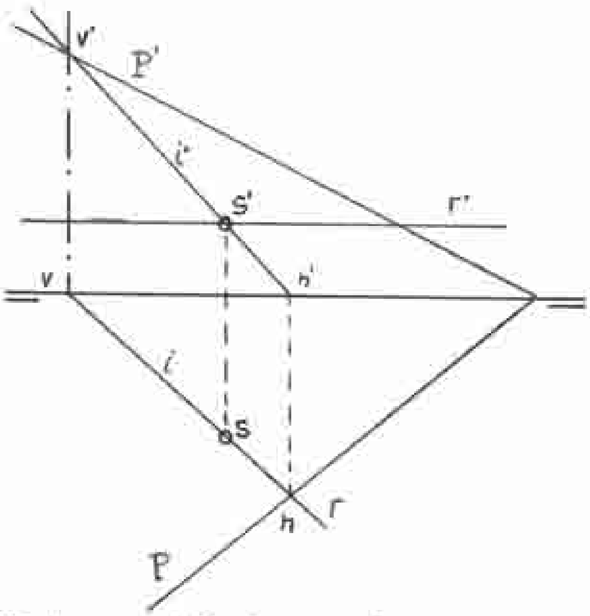
Intersección de un plano con una recta de punta.



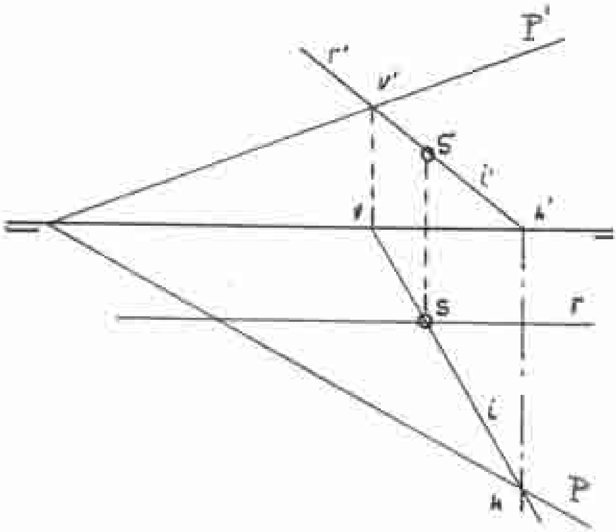
Intersección de un plano con una recta del plano Vertical.



Intersección de un plano con una recta del plano Horizontal.



Intersección de un plano con una recta horizontal.



Intersección de un plano con una recta frontal.

8. PARALELISMO.

Rectas paralelas.

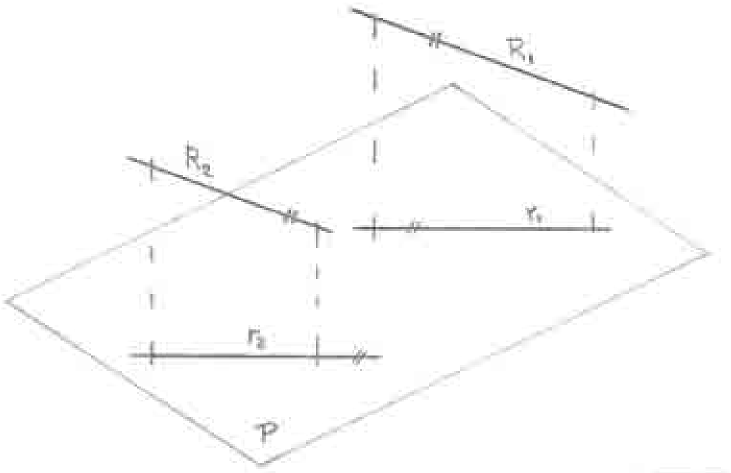
Si dos rectas son paralelas en el espacio sus proyecciones ortogonales sobre los planos de proyección serán paralelas.

Inversamente: Si las proyecciones ortogonales de dos rectas son paralelas dichas rectas lo son en el espacio.

(excepción: rectas de perfil. Comprobar sobre el 2º vertical.)

Se podrán trazar

- -sin condiciones: infinitas rectas.
- -por un punto: una sola recta.



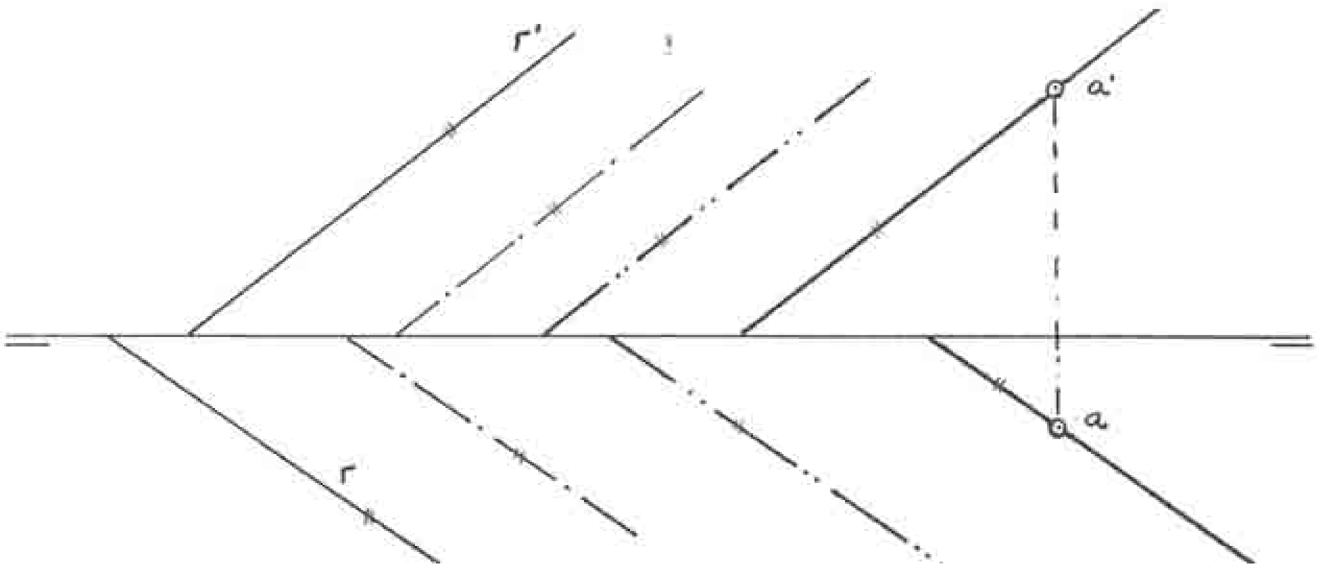


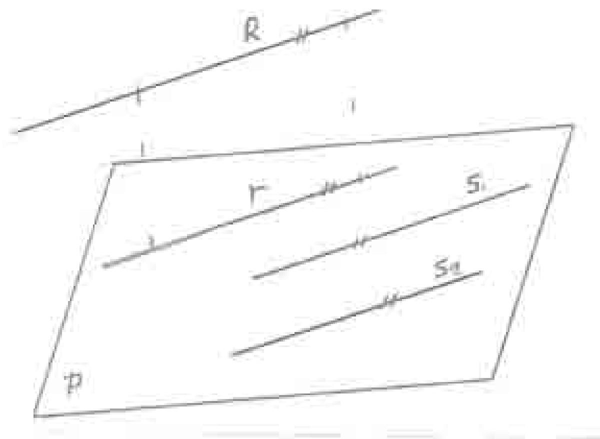
Fig. 45. Rectas paralelas.

Recta paralela a un plano.

Una recta será paralela a un plano si lo es a una recta cualquiera de dicho plano.

Se podrán trazar

- sin condiciones: infinitas rectas.
- por un punto
  - sin condiciones: infinitas rectas.
  - de dirección conocida: una sola recta.



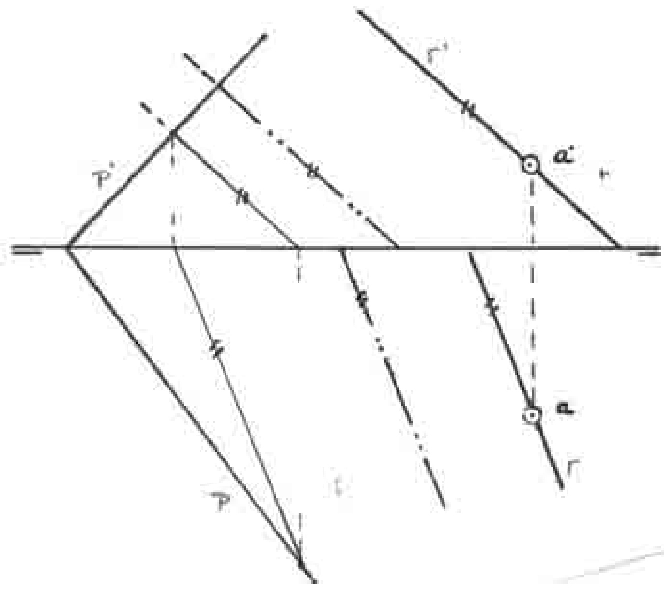


Fig. 46. Recta paralela a un plano.

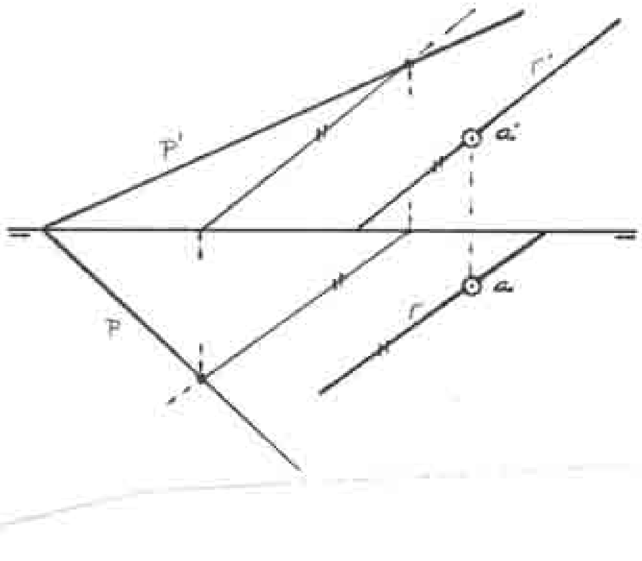


Fig. 47. Recta paralela a una recta de un plano.

Plano paralelo a una recta.

Un plano será paralelo a una recta R dada si contiene una recta S paralela a la dada.

Podremos trazar

-por un punto: infinitos planos.

-que pase por una recta: un solo plano.

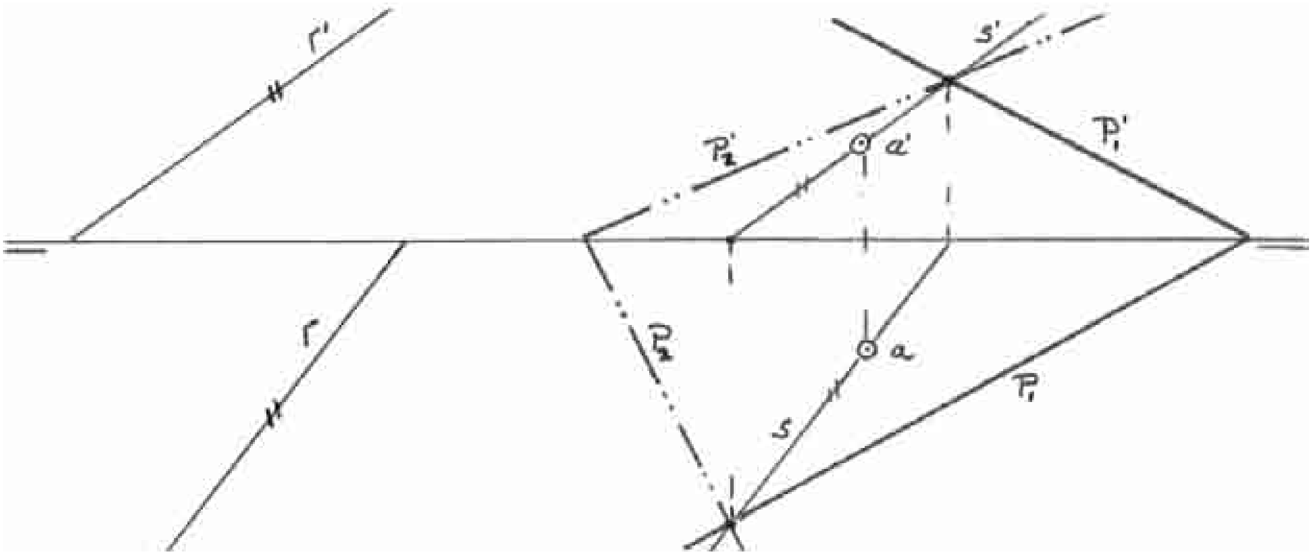


Fig. 48. Plano P_1, P_2, … paralelo a una recta dada R.

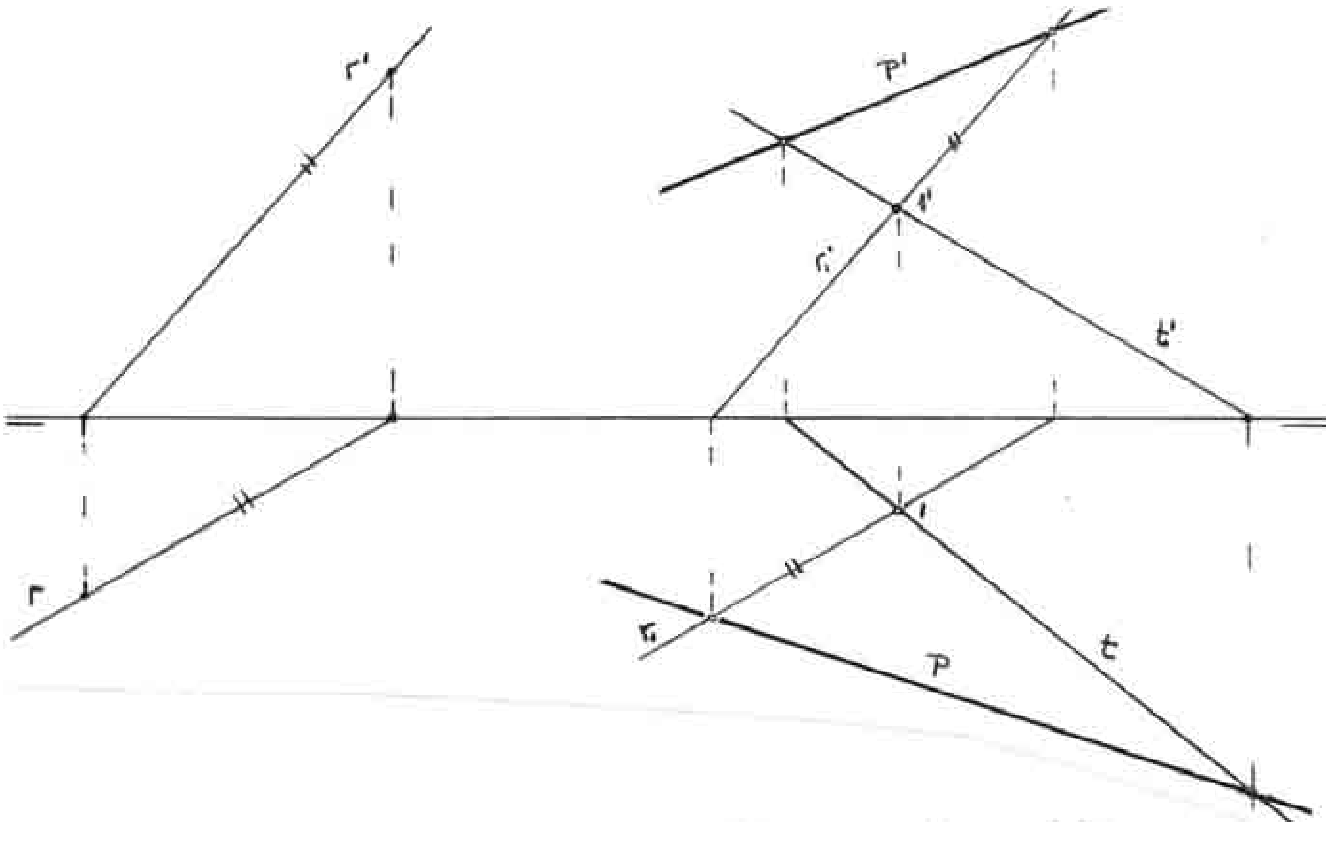


Fig. 49. Trazar un plano que contenga a una recta dada T y sea paralelo a otra dada R.

Planos paralelos.

Dos ó más planos son paralelos si sus rectas de intersección con otro plano cualquiera son paralelas.

Se podrán trazar

-sin condiciones: infinitos planos.

-por un punto: un solo plano.

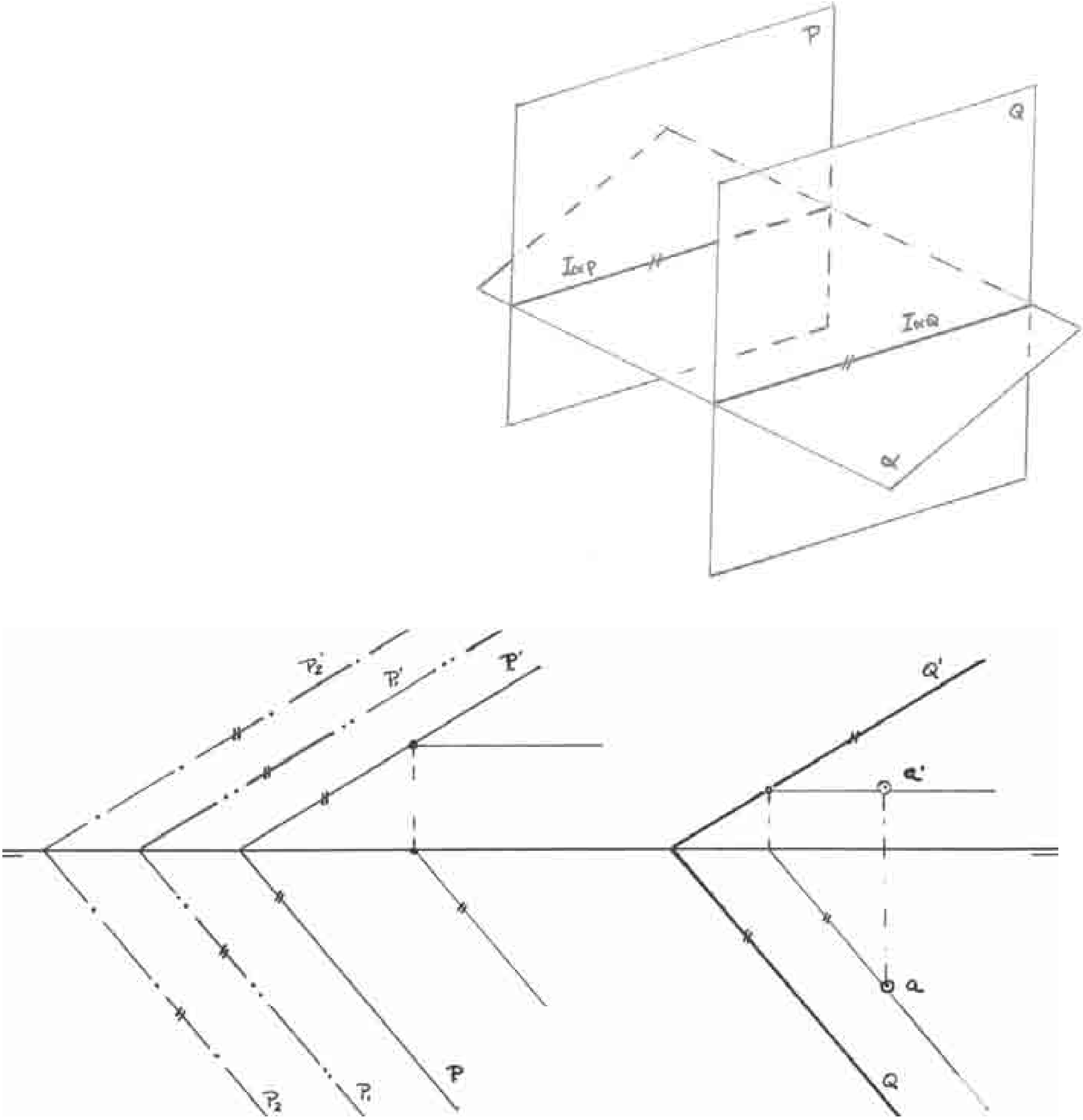
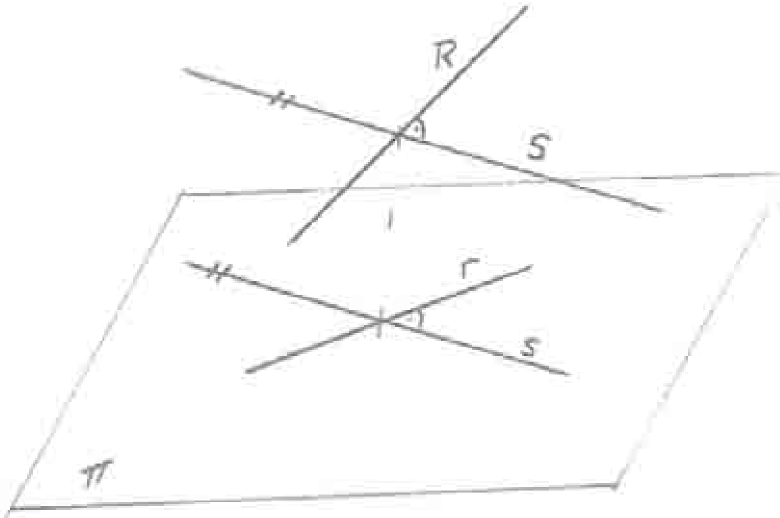


Fig. 50. Planos paralelos P, P_1, P_2, … Q.

9. PERPENDICULARIDAD.

Teorema de las tres perpendiculares.

*Si dos rectas **R** y **S** son perpendiculares en el espacio sus proyecciones ortogonales sobre un plano dado π serán perpendiculares si una de las rectas es paralela a dicho plano.*



Perpendicularidad entre rectas.

En este Sistema de Representación y teniendo en cuenta el teorema de las tres perpendiculares se podrán trazar dos perpendiculares inmediatas a una recta dada: una frontal y una horizontal.

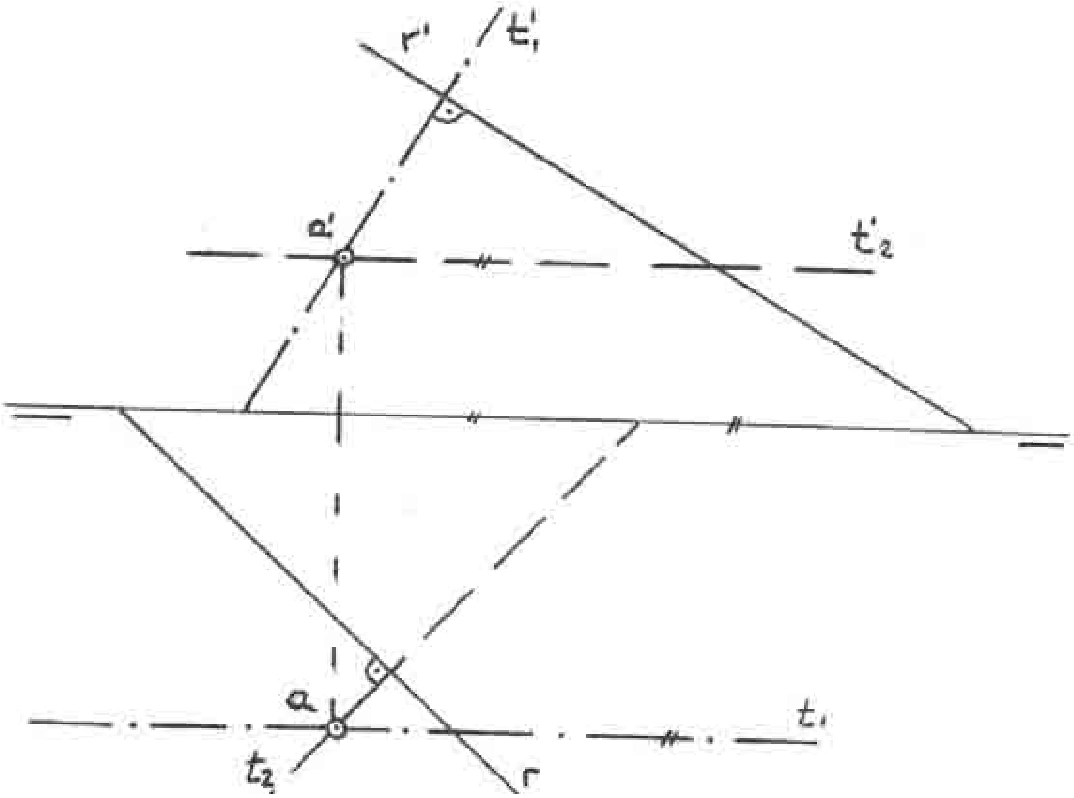


Fig. 51. Rectas perpendiculares, T_1 y T_2, a una recta dada R.

Perpendicularidad entre recta y plano.

-Una recta será perpendicular a un plano si lo es a dos rectas, no paralelas, de dicho plano.

-Si una recta es perpendicular a un plano lo es tambien a todas las rectas de ese plano.

-Dos rectas son perpendiculares si una de ellas está contenida en un plano perpendicular a la otra.

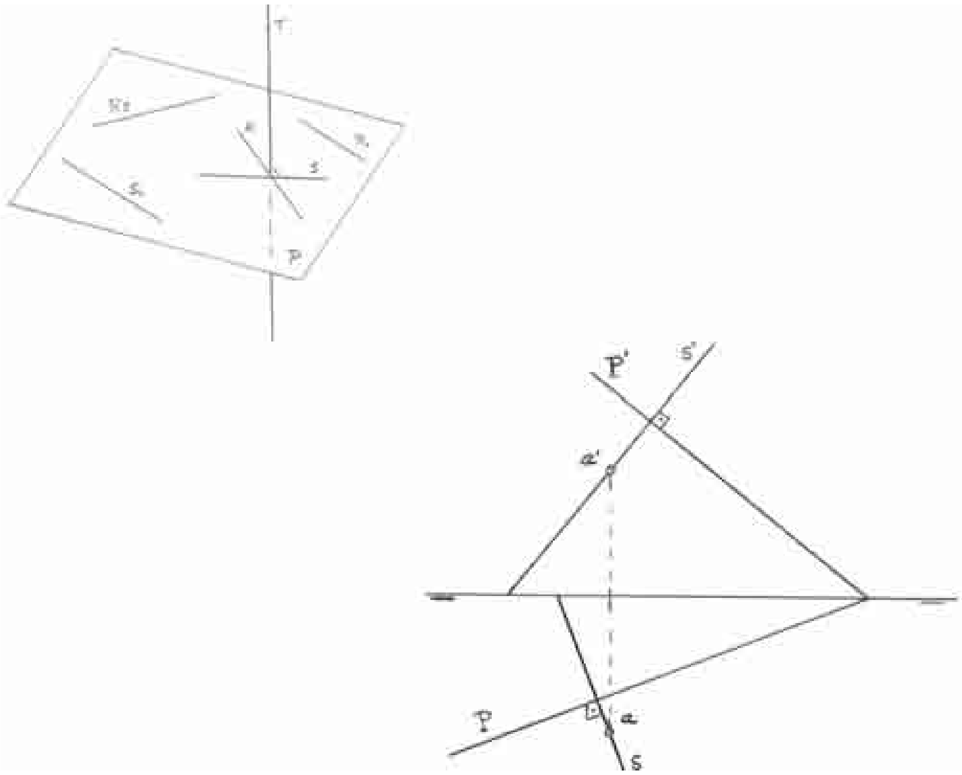


Fig. 52. Por un punto dado A trazar una recta perpendicular a un plano dado P.

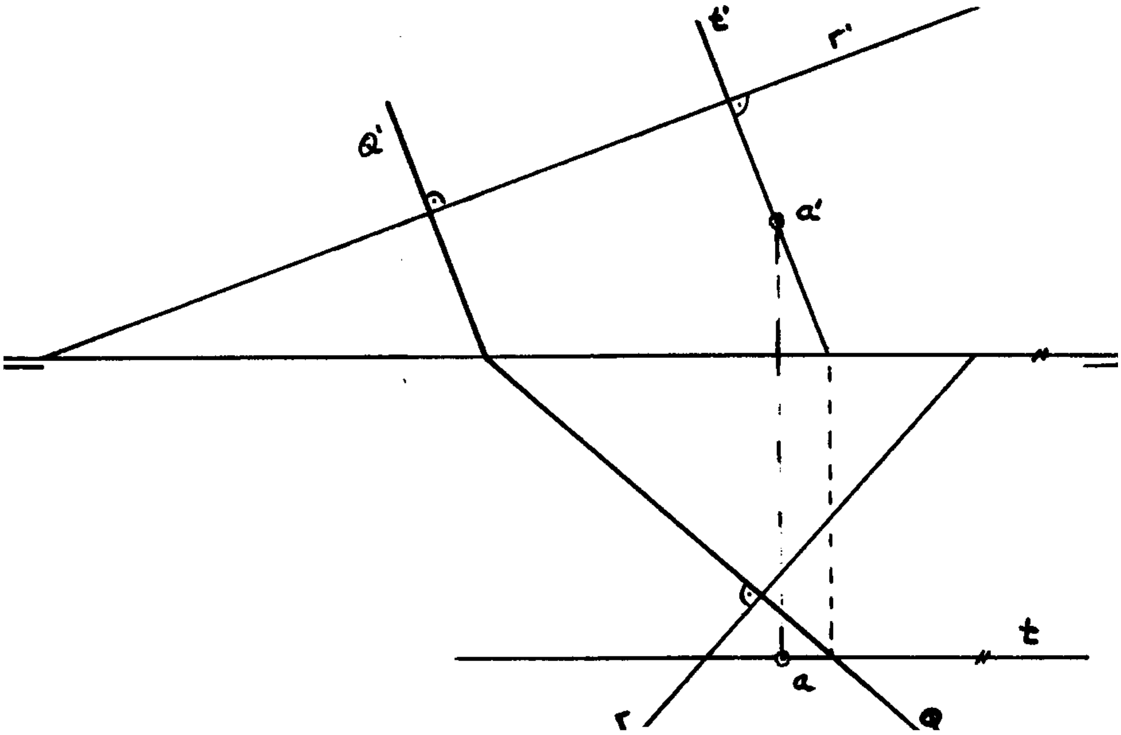
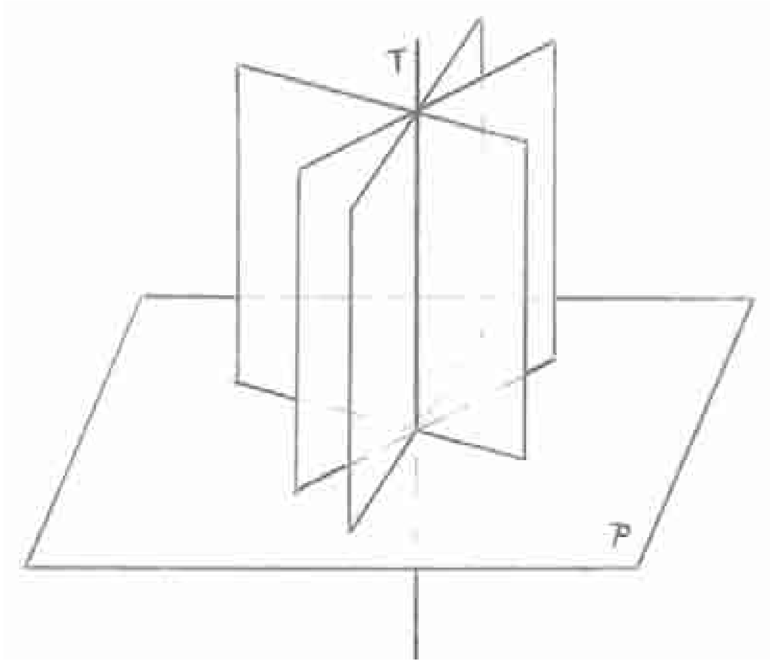


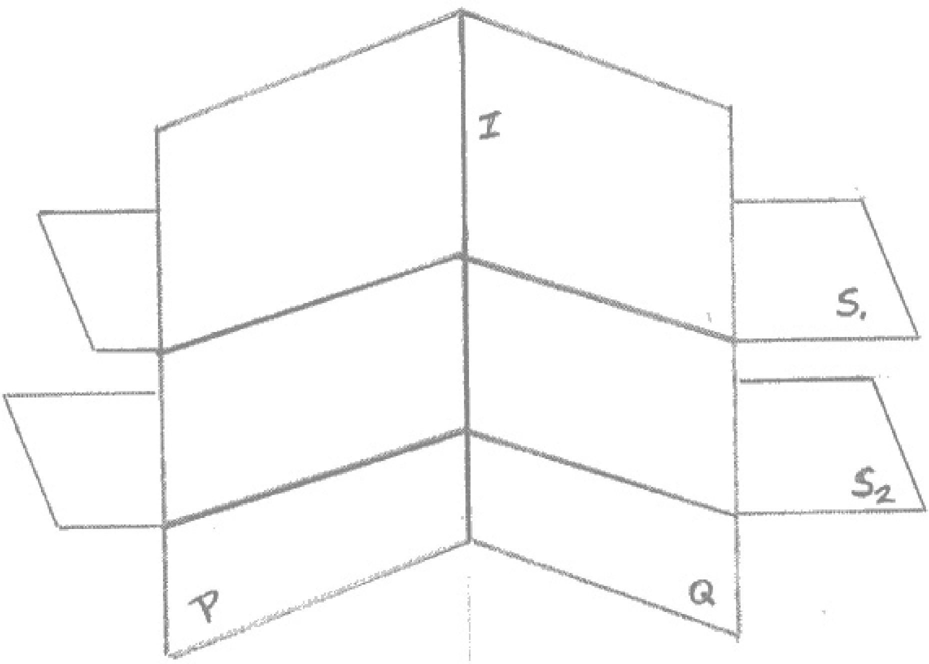
Fig. 53. Por un punto dado A trazar un plano perpendicular a una recta dada R.

Perpendicularidad entre planos.

-Un plano será perpendicular a otro si contiene a una recta perpendicular a éste.
(se podrán trazar infinitos planos).



-Un plano será perpendicular a otros dos, P y Q, si es perpendicular a la recta intersección de ambos.
(se podrán trazar infinitos planos S_1; S_2; …)



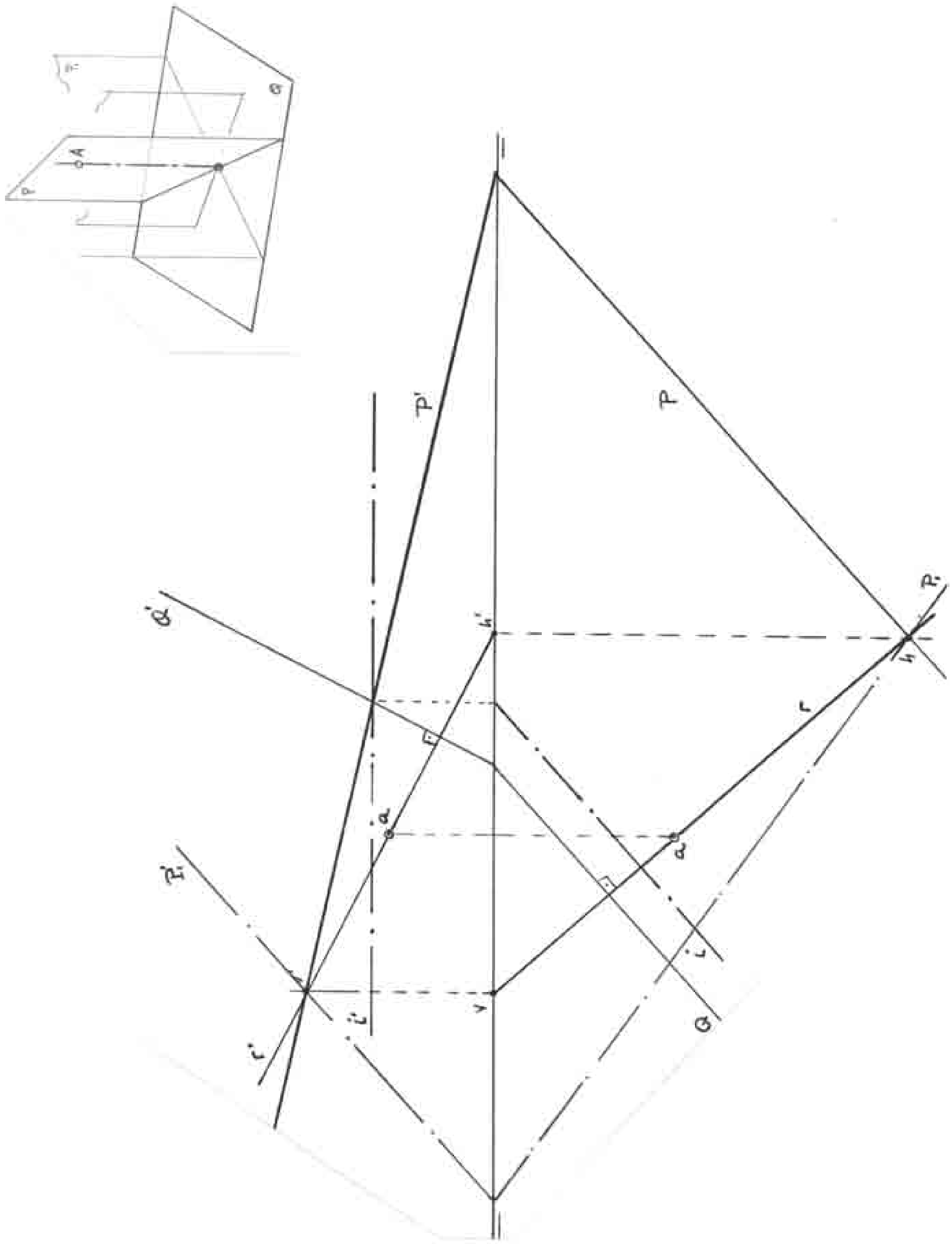


Fig. 54. Por un punto dado A trazar un plano (P; P_1; …) perpendicular a otro dado Q.

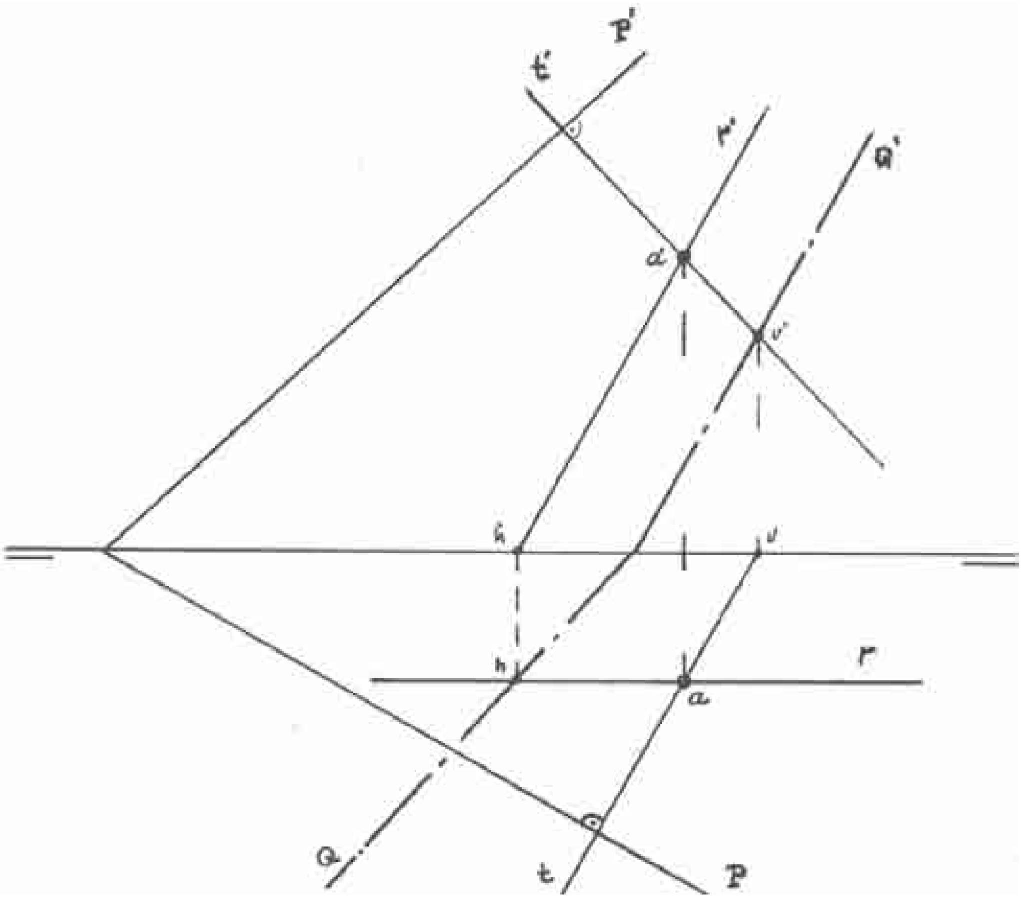


Fig. 55. Por una recta dada R trazar un plano Q perpendicular a un otro dado P.

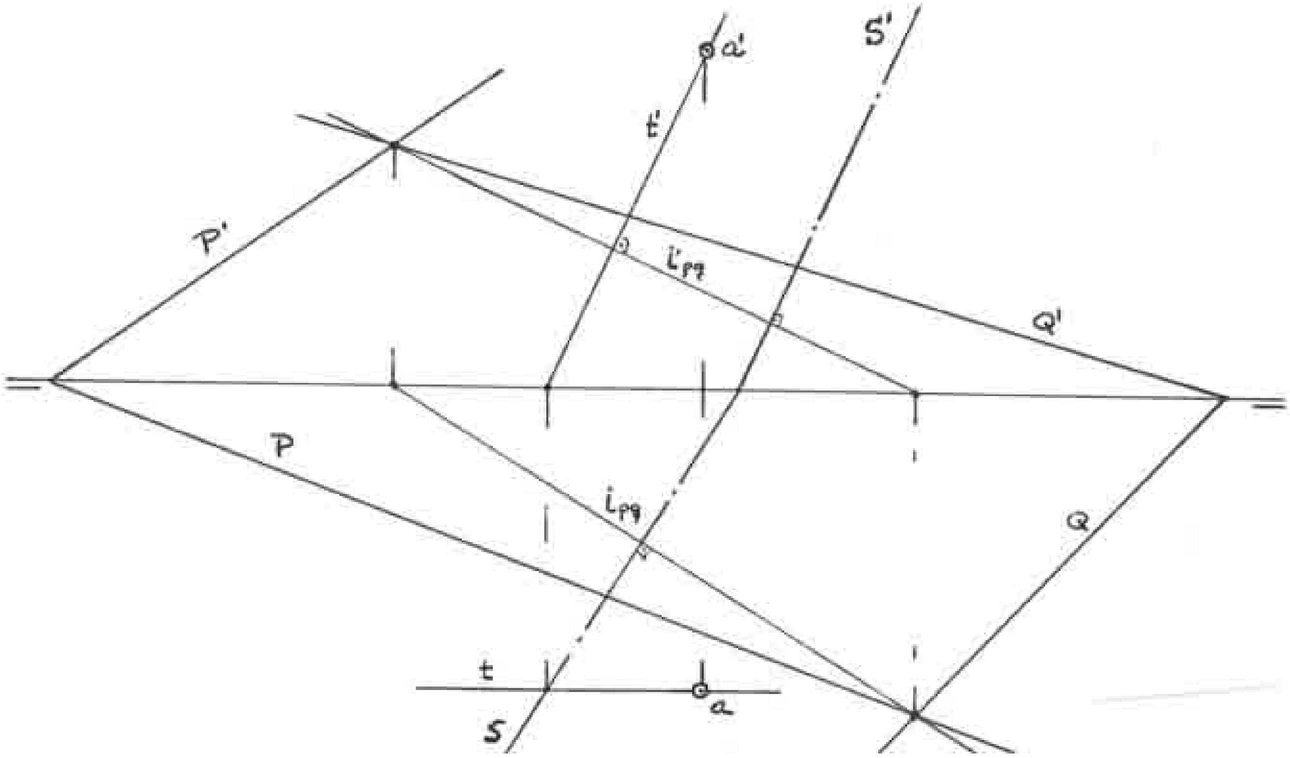


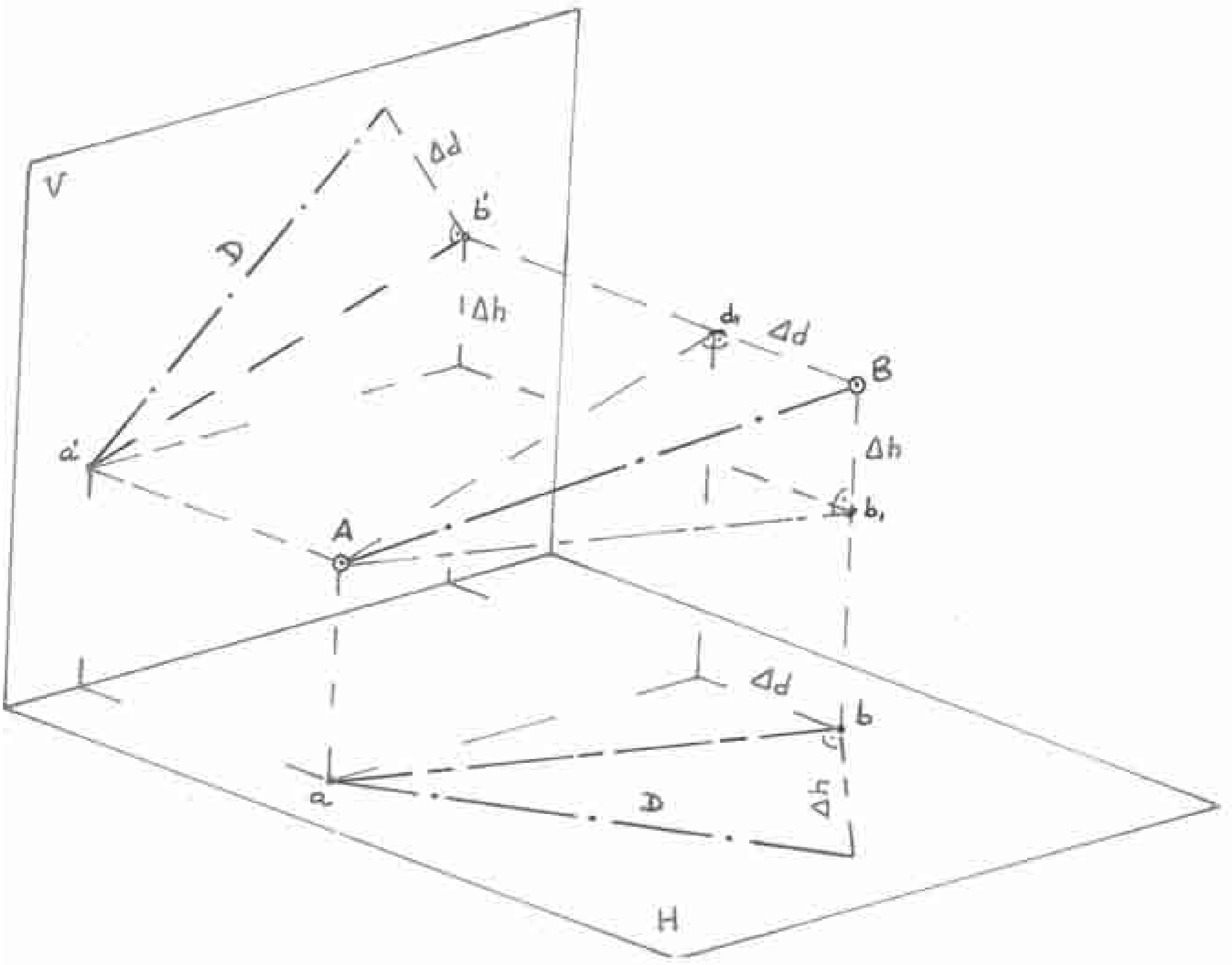
Fig. 56. Por un punto dado A trazar un plano S perpendicular a dos planos dados P y Q.

10. DISTANCIAS.

Distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos A y B es la línea recta que los une; para determinarla bastará medir la longitud del segmento AB.

Fig. 57. Distancia entre dos puntos.



En la fig. 57 se puede observar que la distancia AB es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABb_1 ó del ABd_1; de ahí se deduce que la verdadera magnitud de un segmento cualquiera AB es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son:

-la proyección horizontal del segmento y la diferencia de cotas de los puntos A y B: Δh

-la proyección vertical del segmento y la diferencia de alejamientos de los puntos A y B: Δd

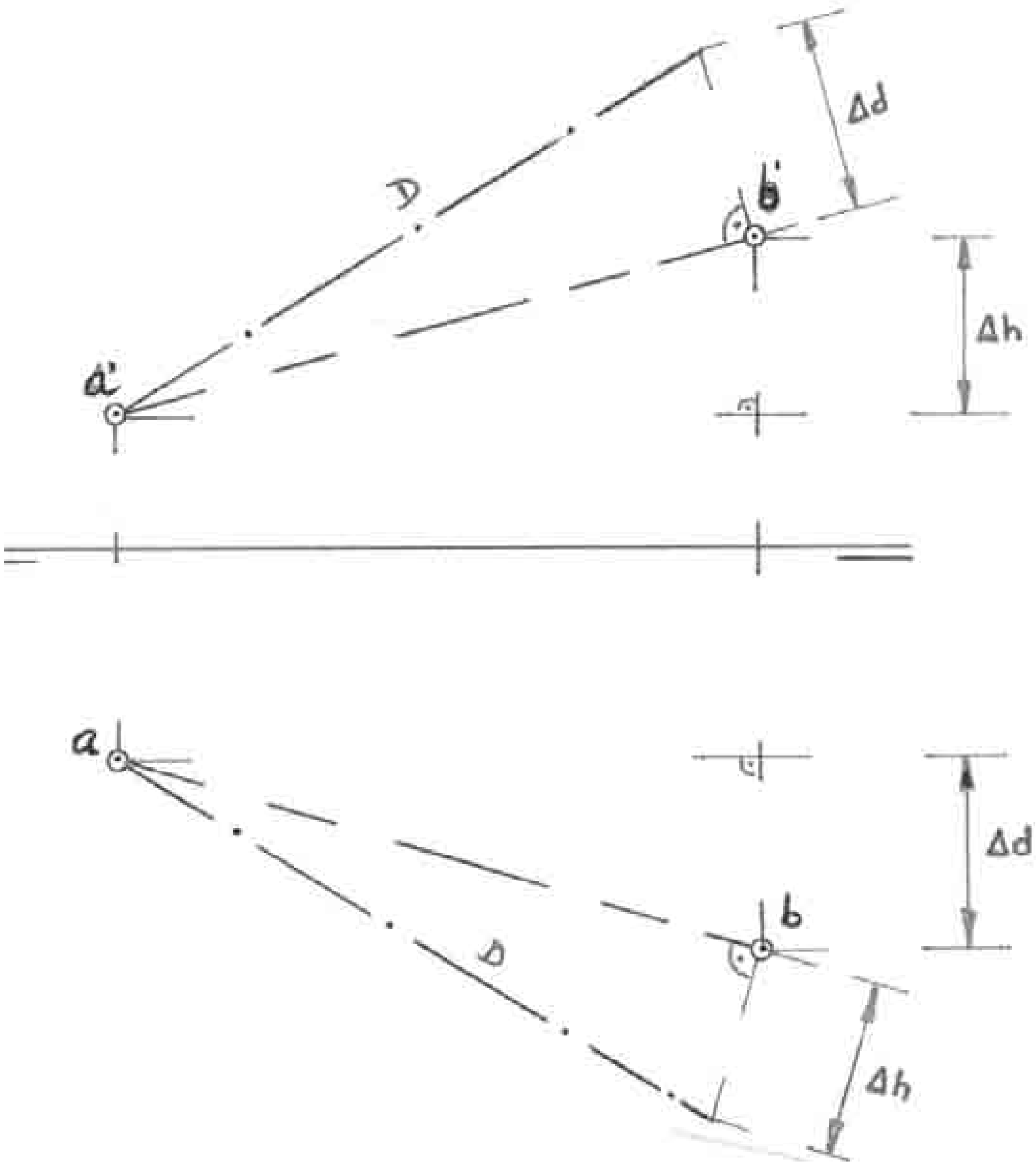


Fig. 58. Determinación de la distancia entre dos puntos.

Distancia de un punto a un plano.

Dado el punto A y el plano P; para hallar la distancia del punto al plano se procederá de la siguiente manera: (fig. 59)

1. Por el punto A se traza la recta T perpendicular al plano P.
2. Se determina el punto de intersección I de la recta T y el plano P.
3. El segmento AI será la distancia buscada.

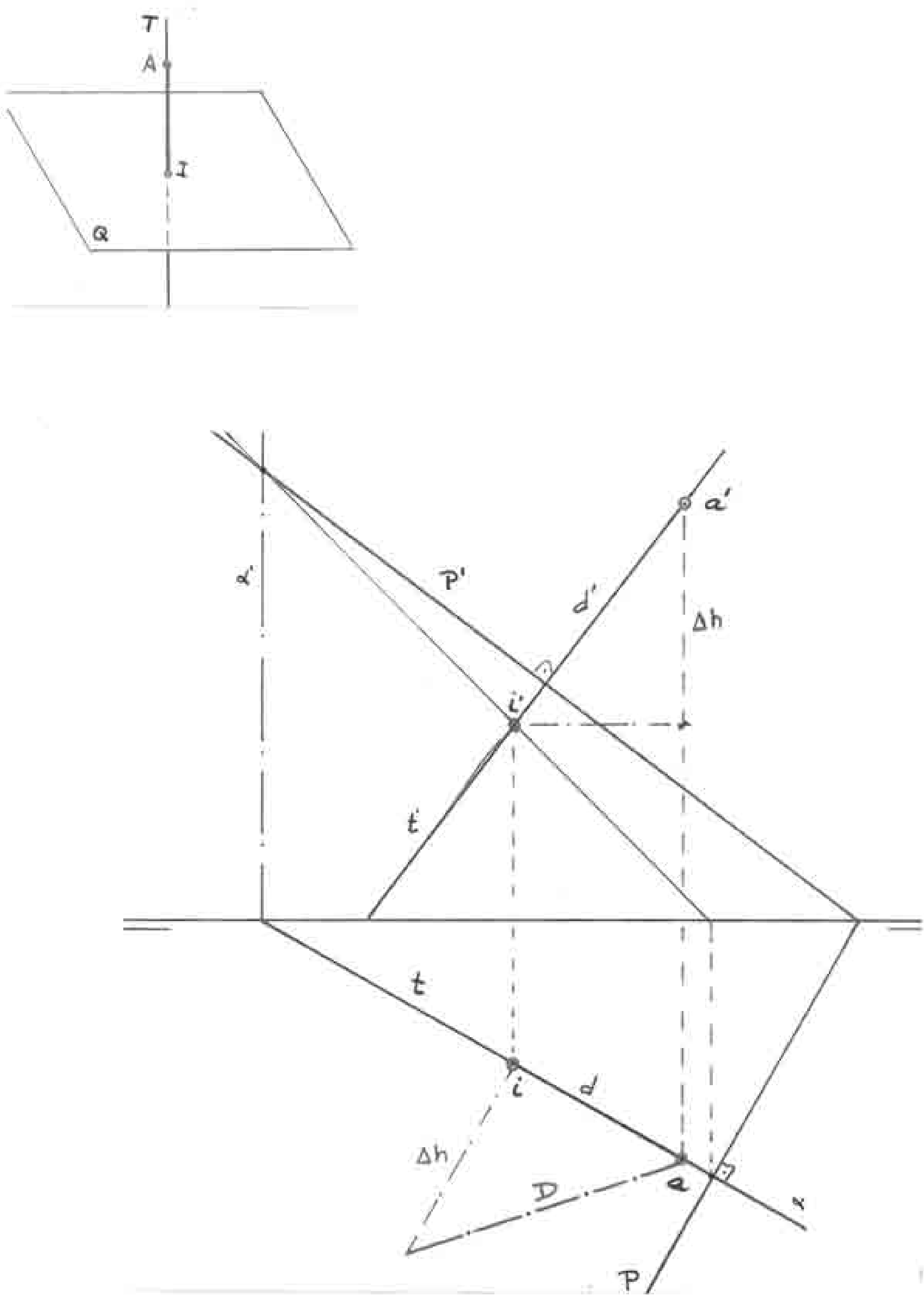
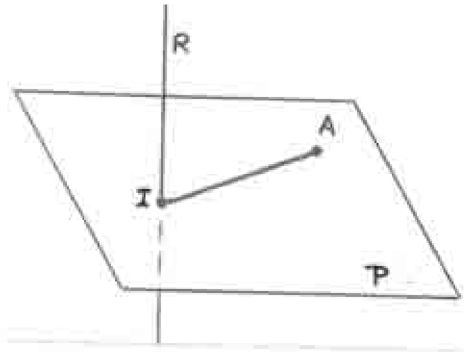


Fig. 59. Distancia de un punto A a un plano P.

Distancia de un punto a una recta.

Dado el punto A y la recta R; para determinar la distancia del punto a la recta se procederá de la siguiente manera: (fig. 60)

1. Por el punto A se traza el plano P perpendicular a la recta R.
2. Se determina el punto I: intersección de la recta R y el plano P.
3. El segmento AI será la distancia buscada.



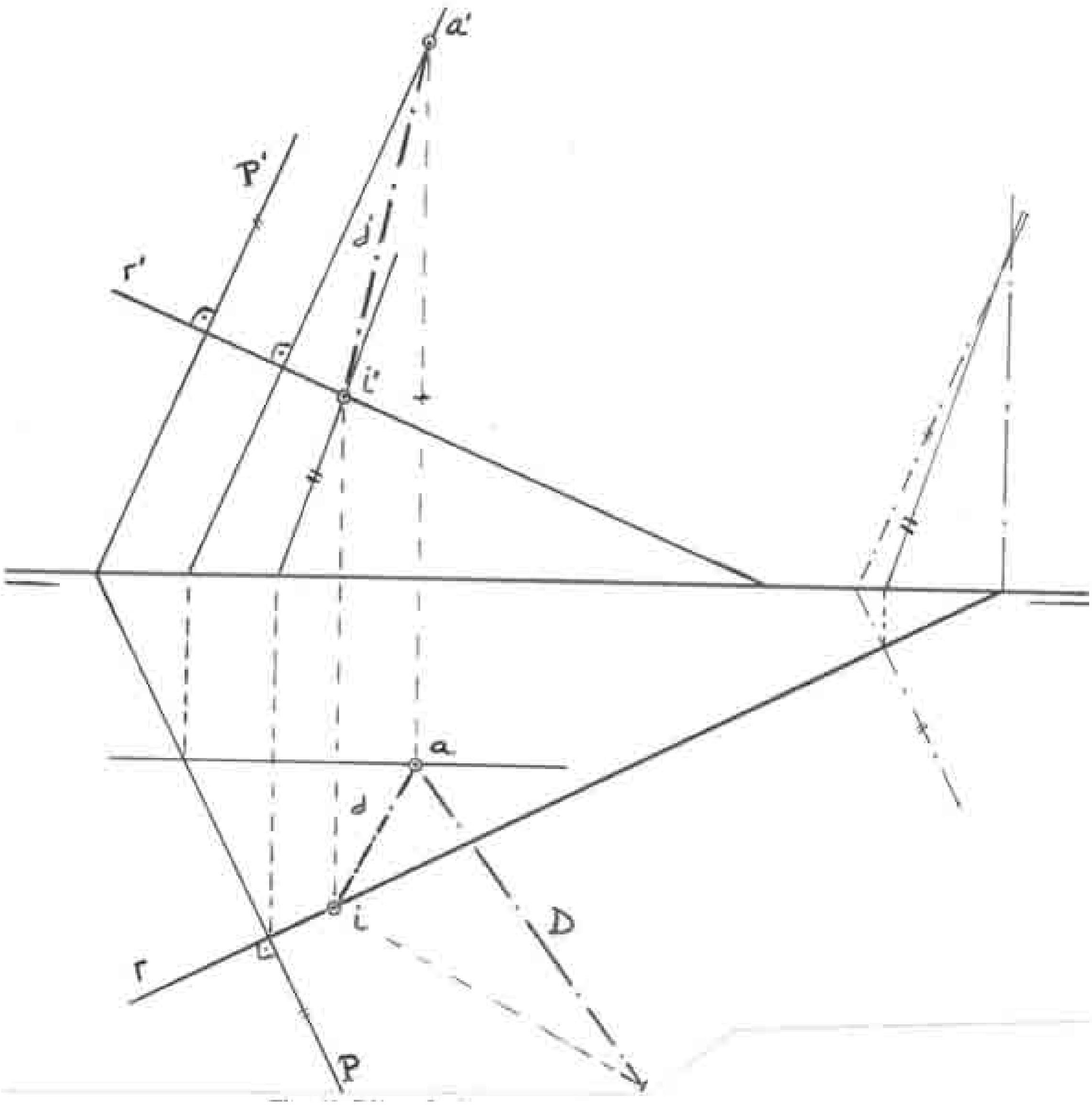
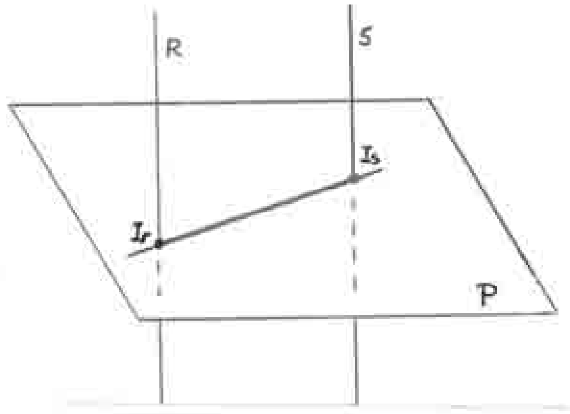


Fig. 60. Distancia de un punto A a una recta R.

Distancia entre dos rectas paralelas.

Para determinar la distancia entre dos rectas paralelas R y S; se procederá de la siguiente manera: (fig. 61)

1. Se traza un plano P perpendicular a una de las rectas.
2. Se determinan los puntos de intersección (Ir, Is) de las rectas dadas con el plano P.
3. El segmento Ir-Is será la distancia buscada.



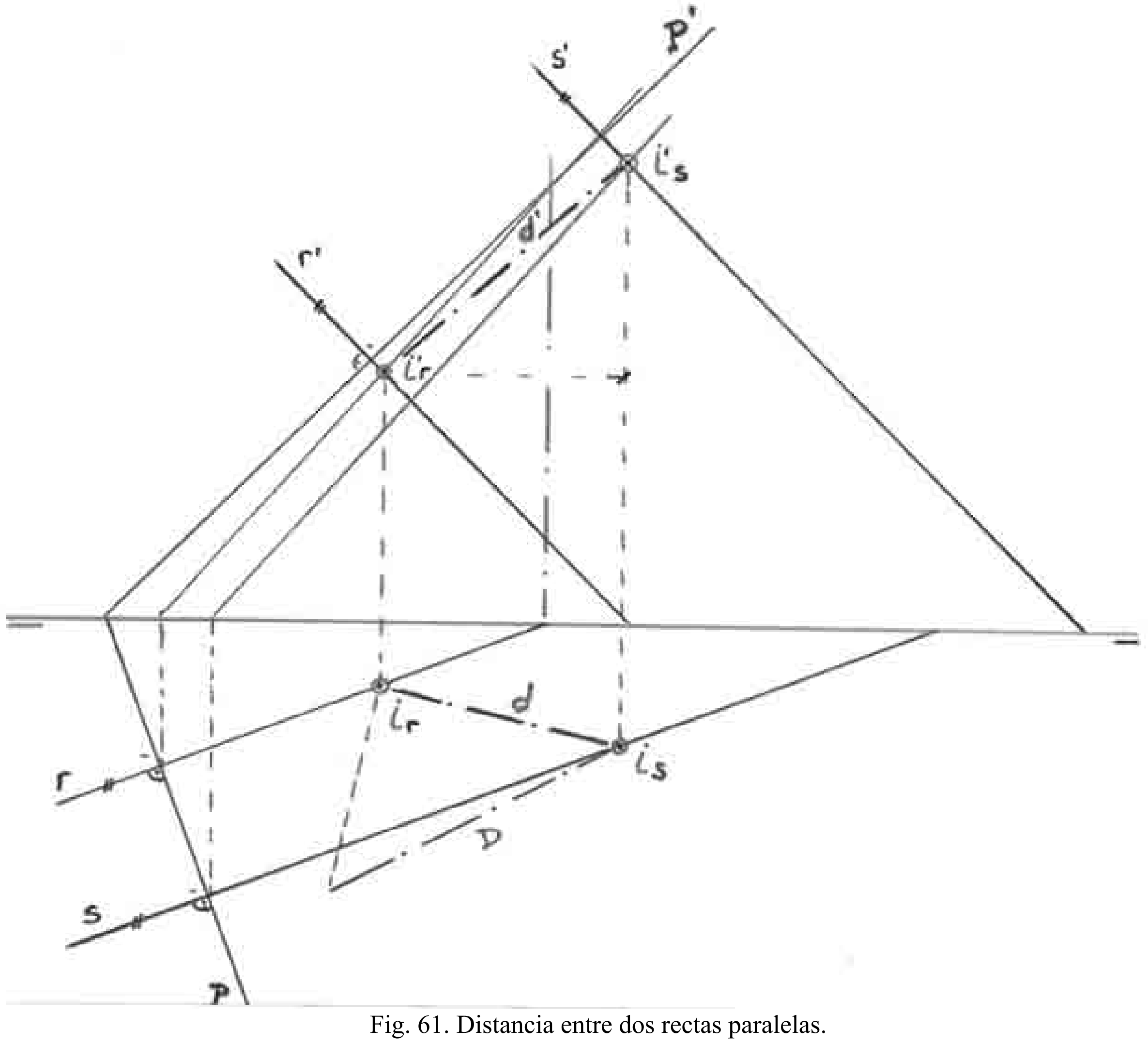
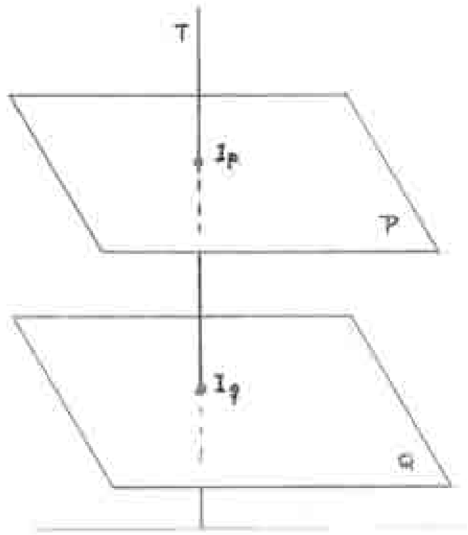


Fig. 61. Distancia entre dos rectas paralelas.

Distancia entre dos planos paralelos.

Las siguientes operaciones permiten determinar la distancia entre dos planos paralelos P y Q. (fig. 62)

1. Se traza una recta T perpendicular a los planos dados.
2. Se determinan los puntos de intersección (Ip, Iq) de la recta T con dichos planos.
3. El segmento Ip-Iq será la distancia buscada.



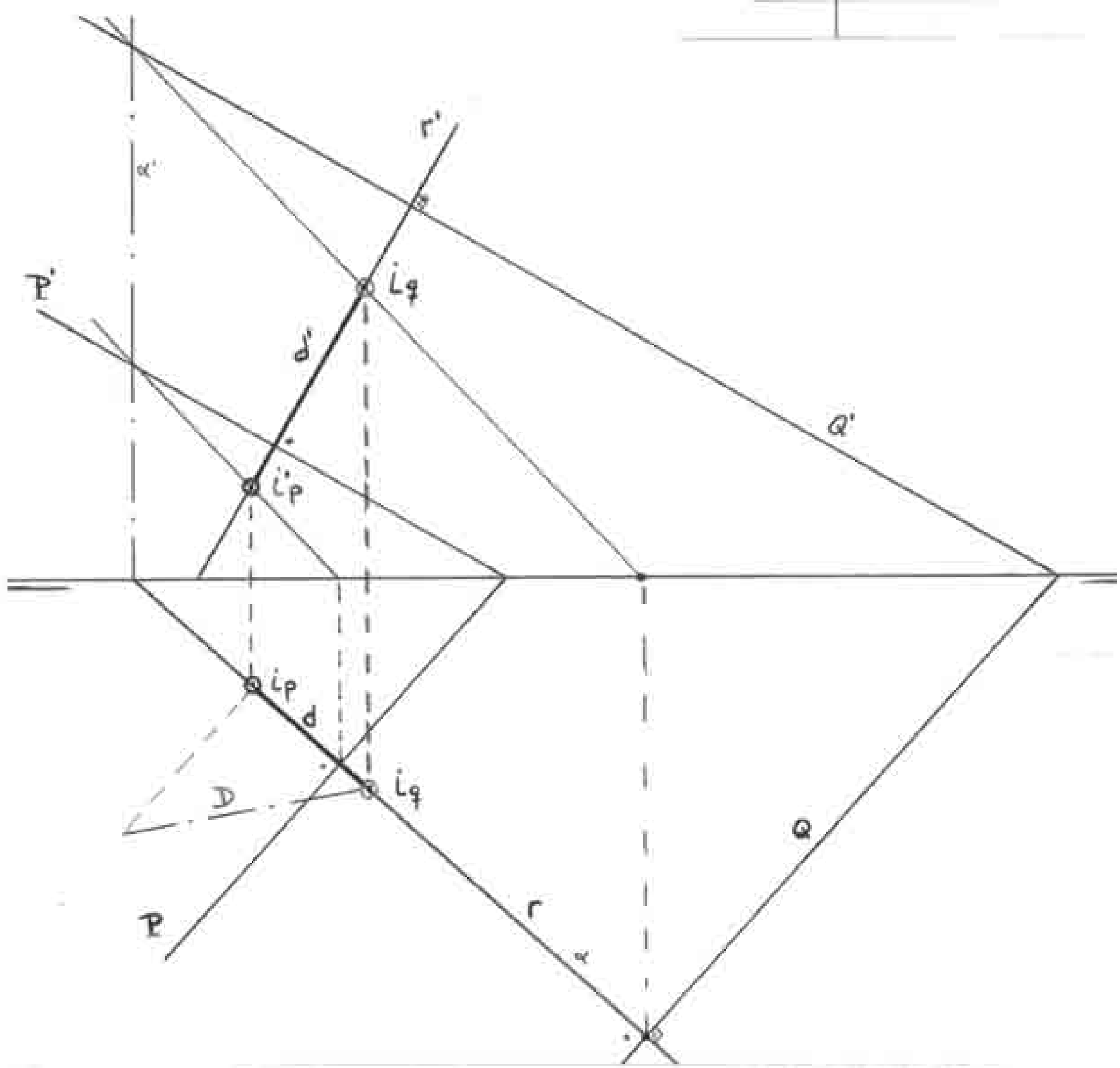


Fig. 62. Distancia entre dos planos paralelos.

Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.

Se denomina mínima distancia ó distancia entre dos rectas R y S que se cruzan al segmento interceptado por dichas rectas sobre su perpendicular común. (fig. 63)

Para determinar dicho segmento (3-4) se procederá de la siguiente manera:

1. Por un punto A de la recta S se traza una recta R_1 paralela a la recta dada R.
2. Se determina el plano P formado por la recta dada S y la recta R_1.
3. Por un punto 1 de la recta dada R se traza la recta R_2 perpendicular al plano P.
4. Se determina el punto 2 intersección de la recta R_2 y el plano P.
5. Por el punto 2 se traza la recta R_3 paralela a la recta R dada.
6. Por el punto 3 se traza la recta R_4 paralela a la recta R_2.
7. El segmento 3-4, situado sobre la recta R_4, será la distancia buscada.

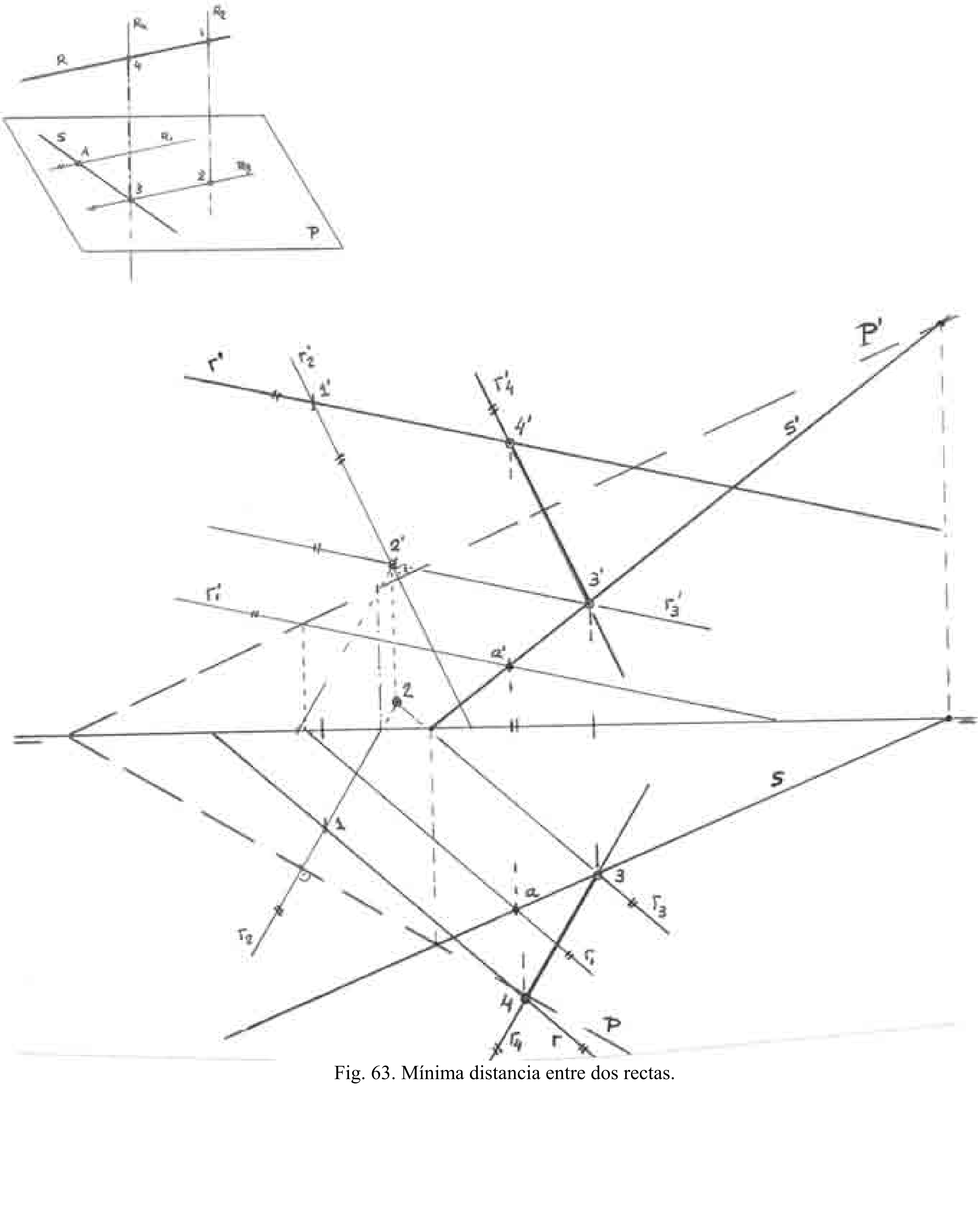
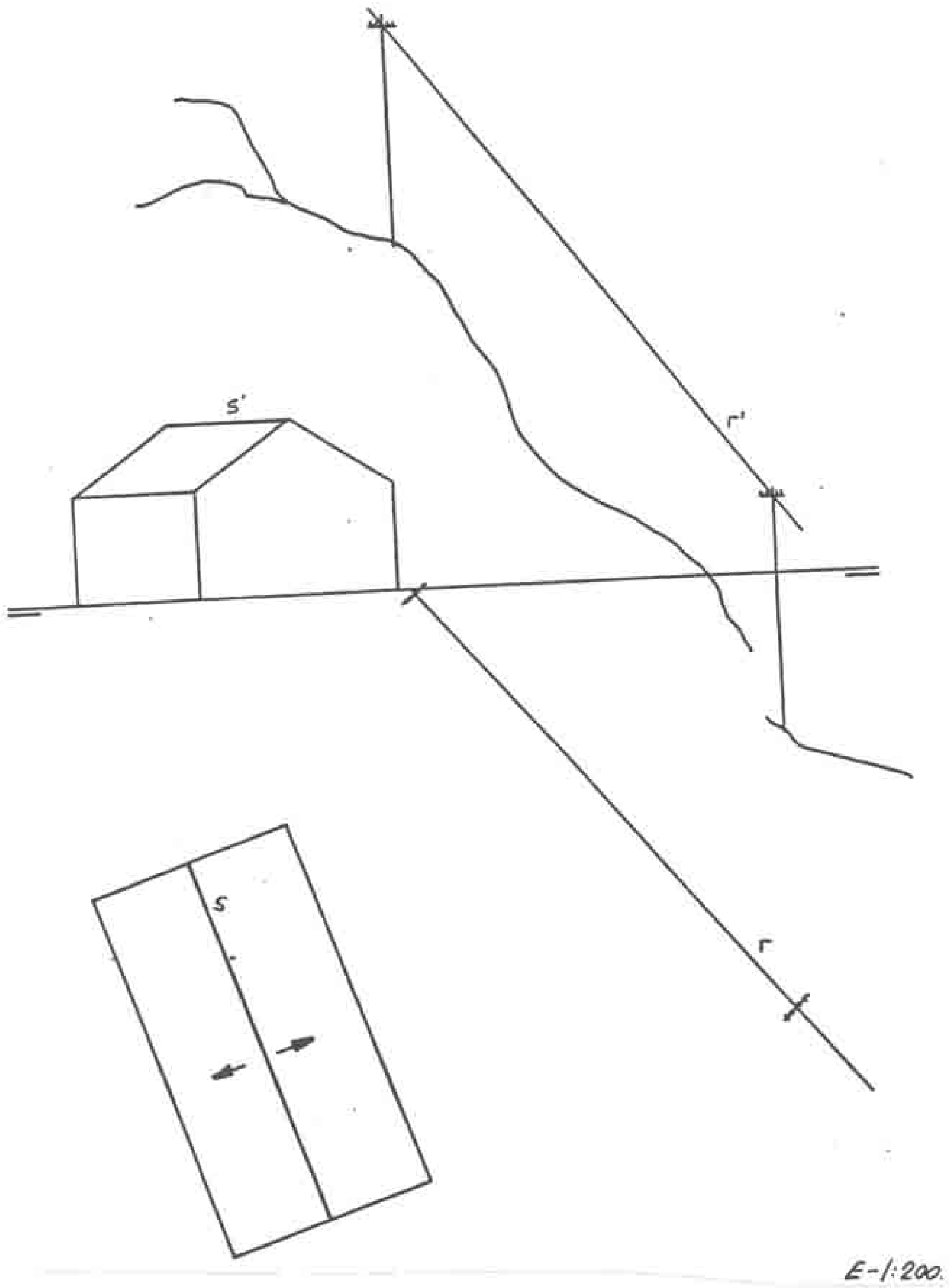
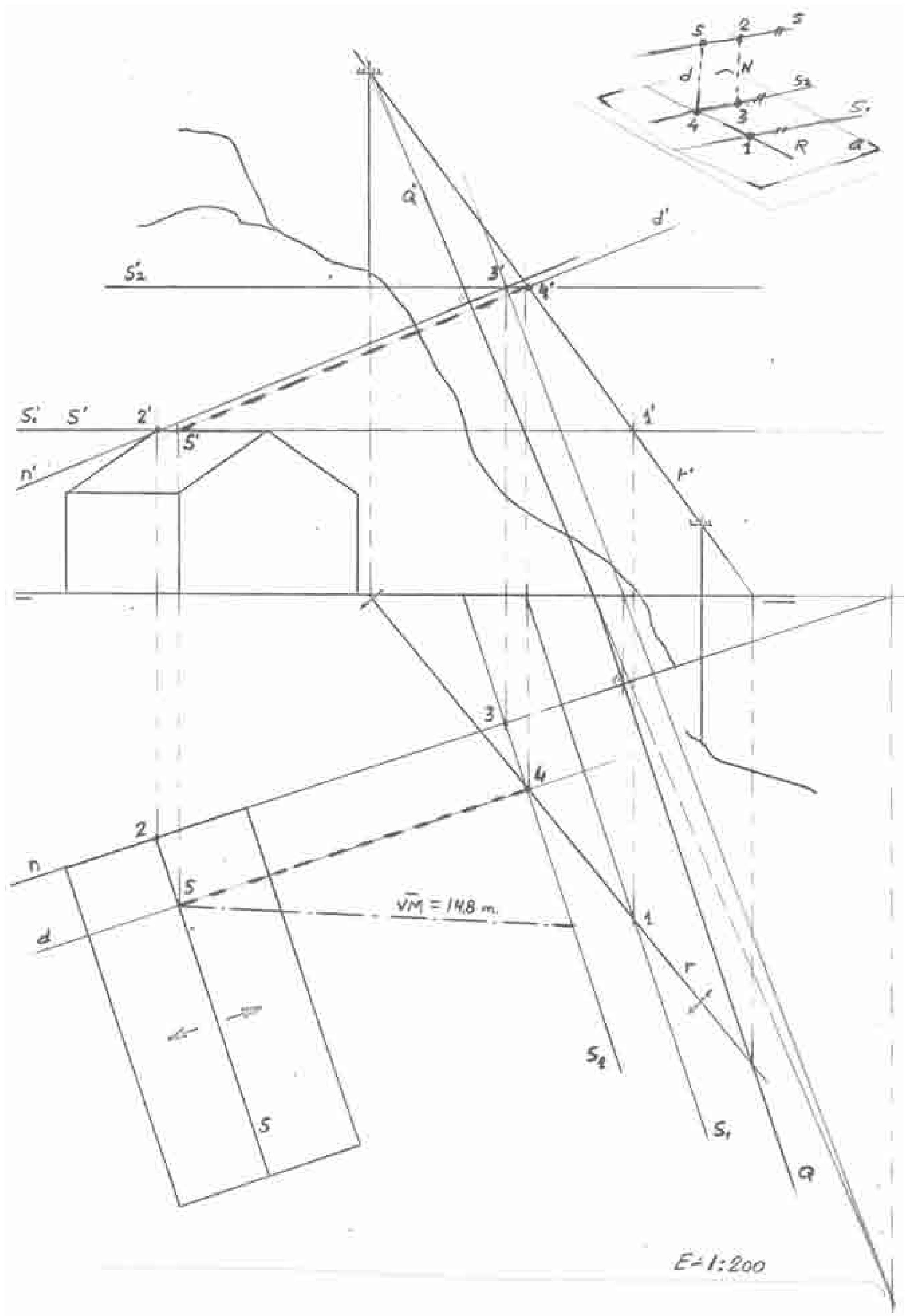


Fig. 63. Mínima distancia entre dos rectas.

Ejercicio.
Determinar la mínima longitud del cable eléctrico (supuesto rectilíneo) necesario para realizar la acometida entre el tendido eléctrico y la cumbrera del edificio.



Solución.



s
2
d
N
S_2
S_1
4
3
1
R
Q
Q'
d'
S'_2
3'
4'
S'_1
S'
2'
5'
1'
n'
r'
3
4
2
n
s
d
$\overline{VM}$ = 14,8 m.
1
r
S_2
S
S_1
Q
E= 1:200

10. CAMBIOS DE PLANO.

Consiste esta operación en sustituir uno de los planos de proyección, el horizontal ó el vertical, por otro cualquiera que sea tambien perpendicular al plano de proyección que se mantiene, de modo que se siga teniendo un Sistema Diédrico de planos ortogonales.

Para ello es preciso escalonar las operaciones de cambio de plano, primero el horizontal y luego el vertical ó viceversa, hasta conseguir la posición definitiva que se desea.

En el cambio de plano la figura del espacio permanece fija siendo los planos de proyección y, en definitiva, las proyecciones sobre ellos las que varían.

El punto en los cambios de plano.

Sean H y V los planos horizontal y vertical de proyección, respectivamente; **a** y **a´** las proyecciones sobre dichos planos de un punto A del espacio.

Si se toma un nuevo plano de proyección V´, perpendicular a H, se formará un nuevo Sistema Diédrico cuyos planos de proyección serán H y V´; ambos planos determinarán una nueva L.T.

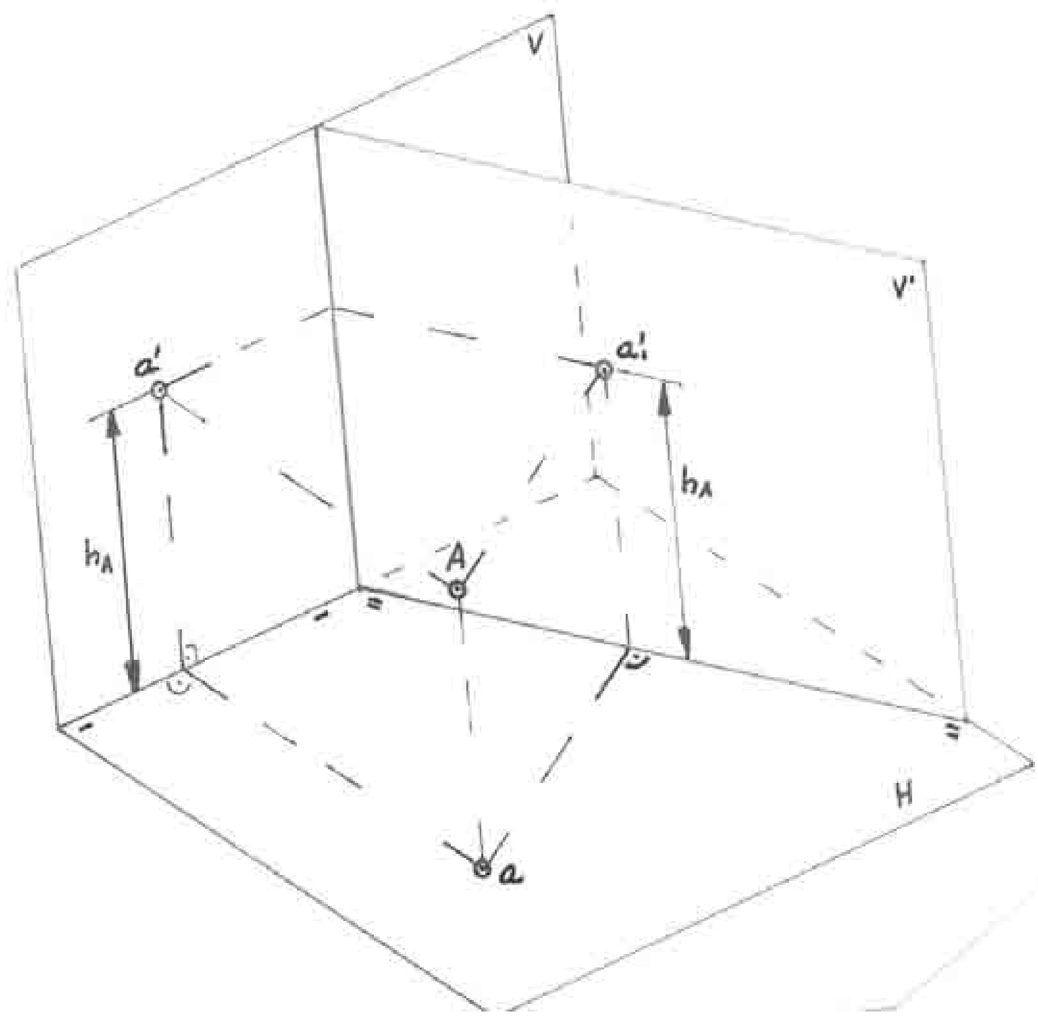


Fig. 64. Cambios de plano.

En este nuevo Sistema Diédrico la proyección horizontal del punto no varía y la nueva proyección vertical estará a una distancia de la nueva L.T. igual a la cota del punto.

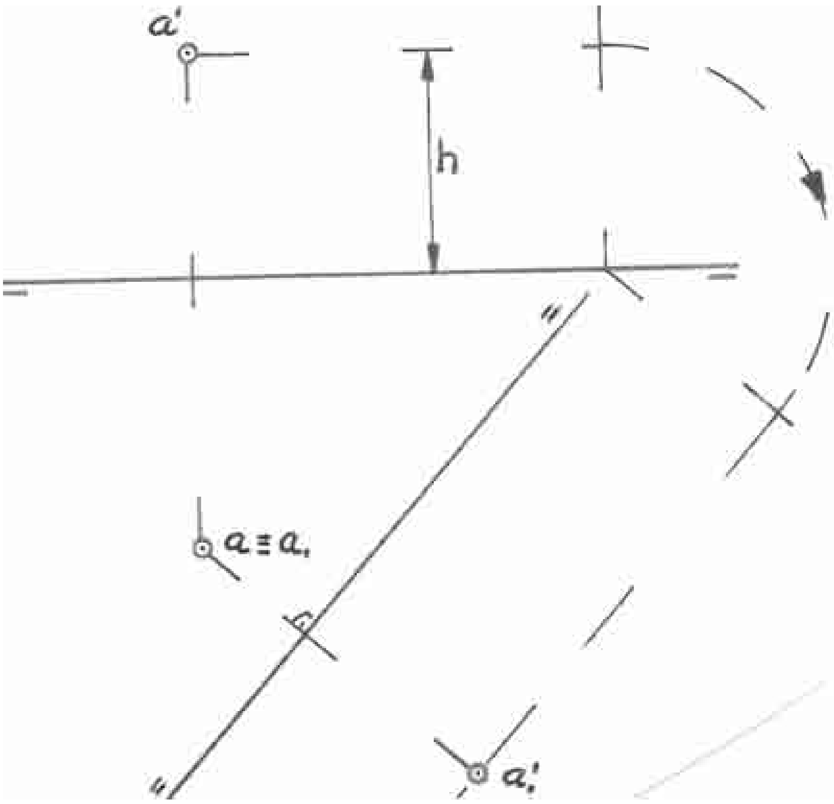
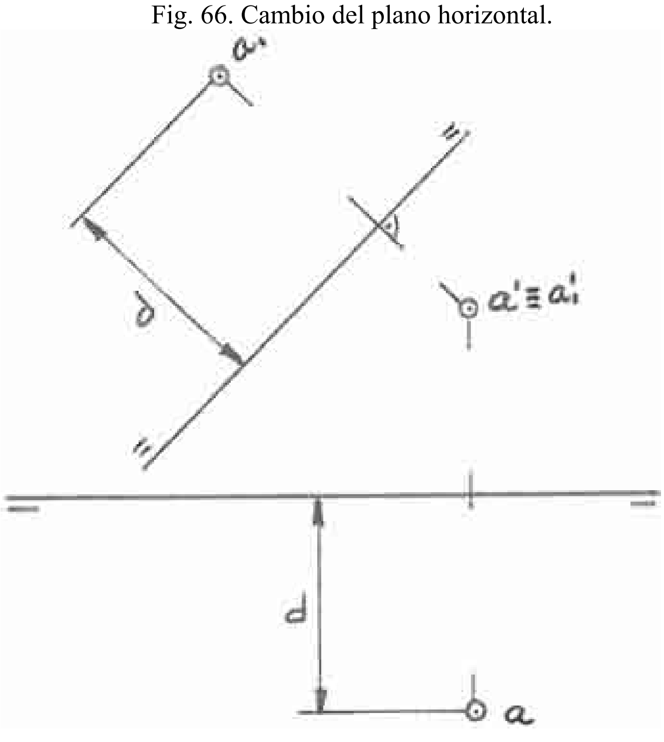


Fig. 65. Cambio del plano vertical.

Si se tomase un nuevo horizontal de proyección la proyección vertical del punto no varía y la nueva proyección horizontal estará a una distancia de la nueva L.T. igual al alejamiento.

Fig. 66. Cambio del plano horizontal.



La recta en los cambios de plano.

Al efectuar un cambio de plano las nuevas proyecciones de la recta se obtendrán uniendo las nuevas proyecciones de dos puntos cualesquiera de la misma.

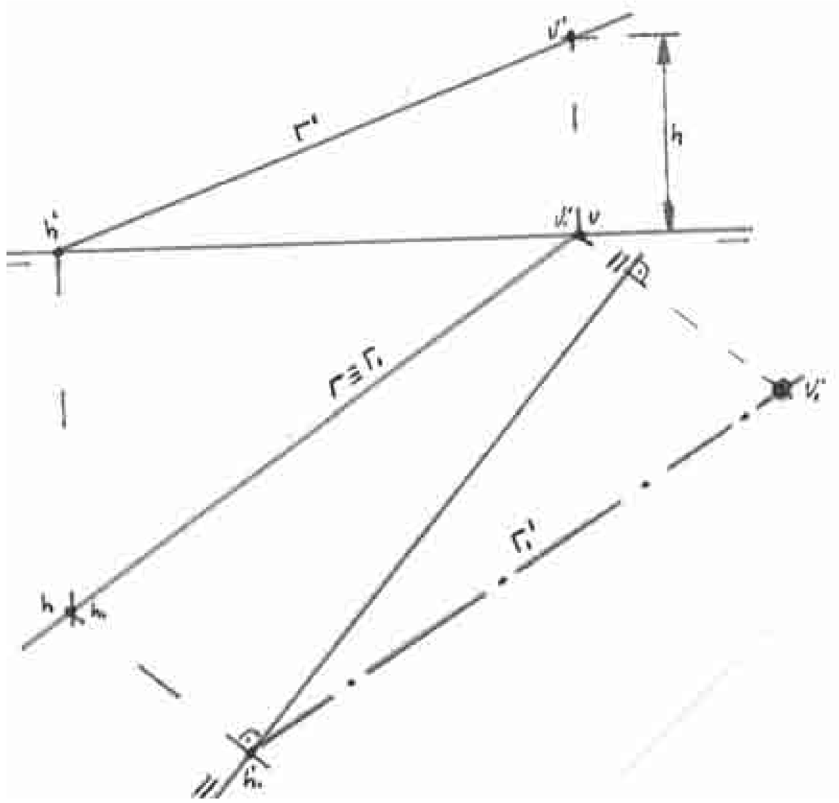


Fig. 67. Cambio del plano vertical.

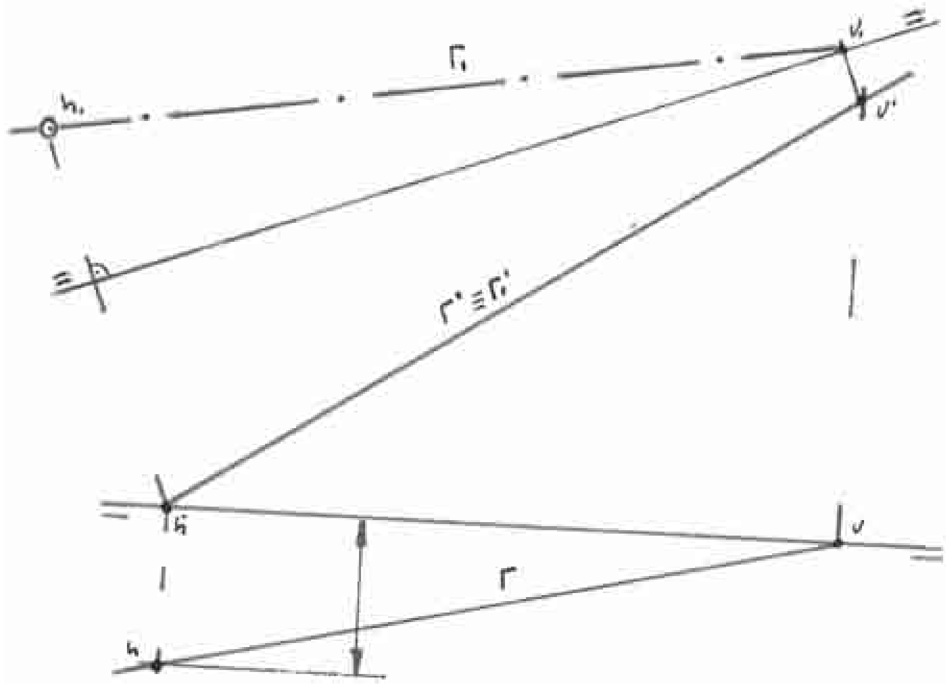


Fig. 68. Cambio del plano horizontal.

En las figuras 67 y 68 las nuevas proyecciones de la recta se han obtenido uniendo las nuevas proyecciones de sus trazas.

Suele interesar situar una recta cualquiera en posiciones favorables: frontal, horizontal, perpendicular al horizontal ó al vertical, de perfil, ...

Las figuras que siguen indican, con suficiente claridad, las operaciones necesarias para situar una recta cualquiera en una posición de las llamadas favorables.

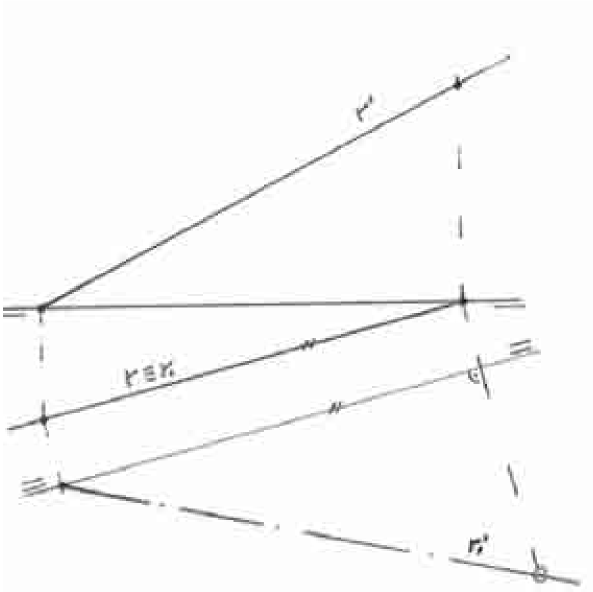


Fig. 69. Situar una recta cualquiera R como recta frontal.

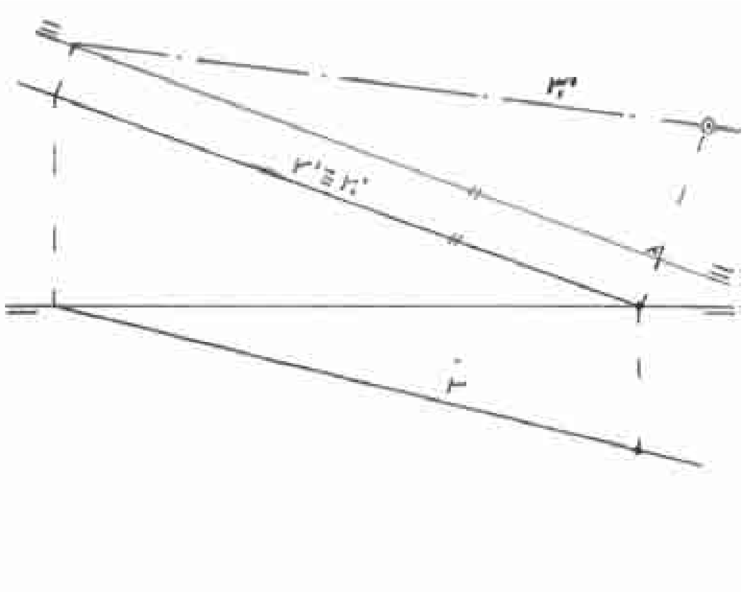


Fig. 70. Situar una recta cualquiera R como recta horizontal.

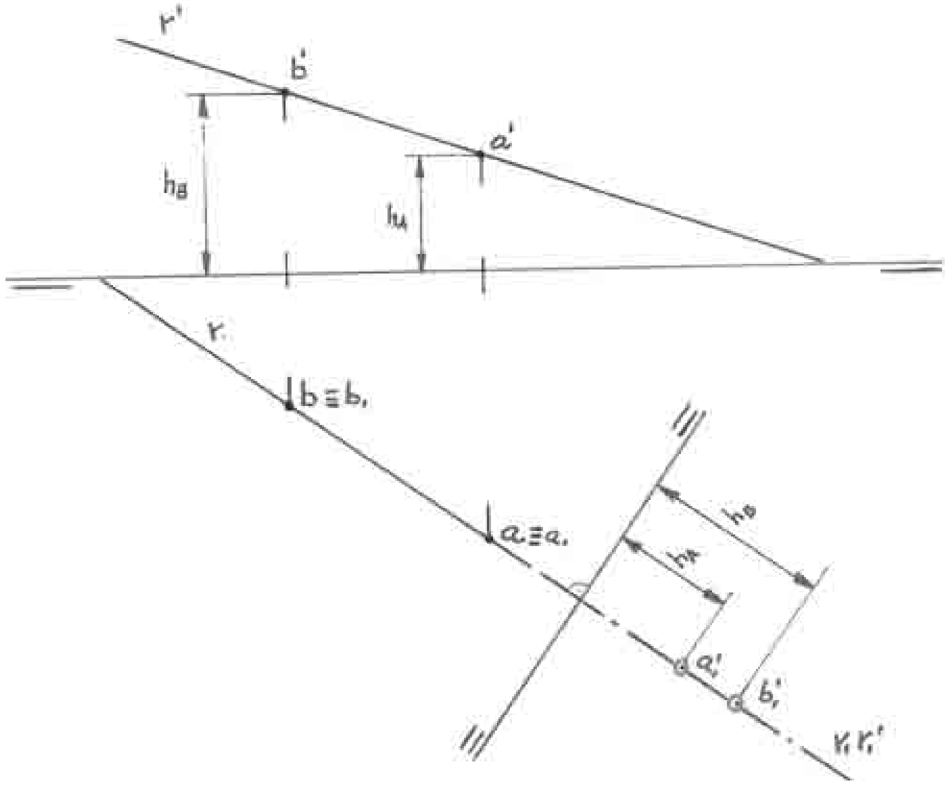


Fig. 71. Situar una recta cualquiera R como recta de perfil.

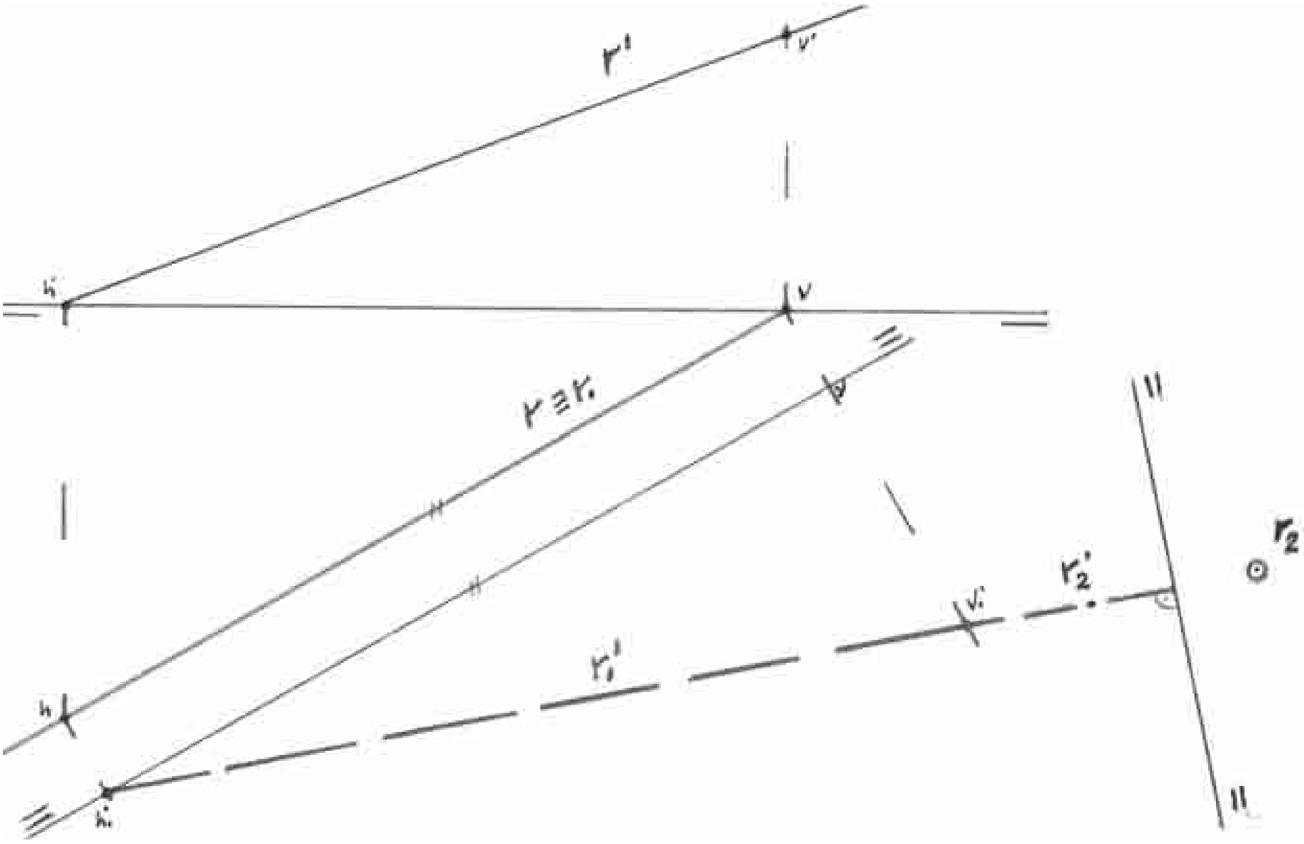


Fig. 72. Situar una recta cualquiera R como recta perpendicular al horizontal.

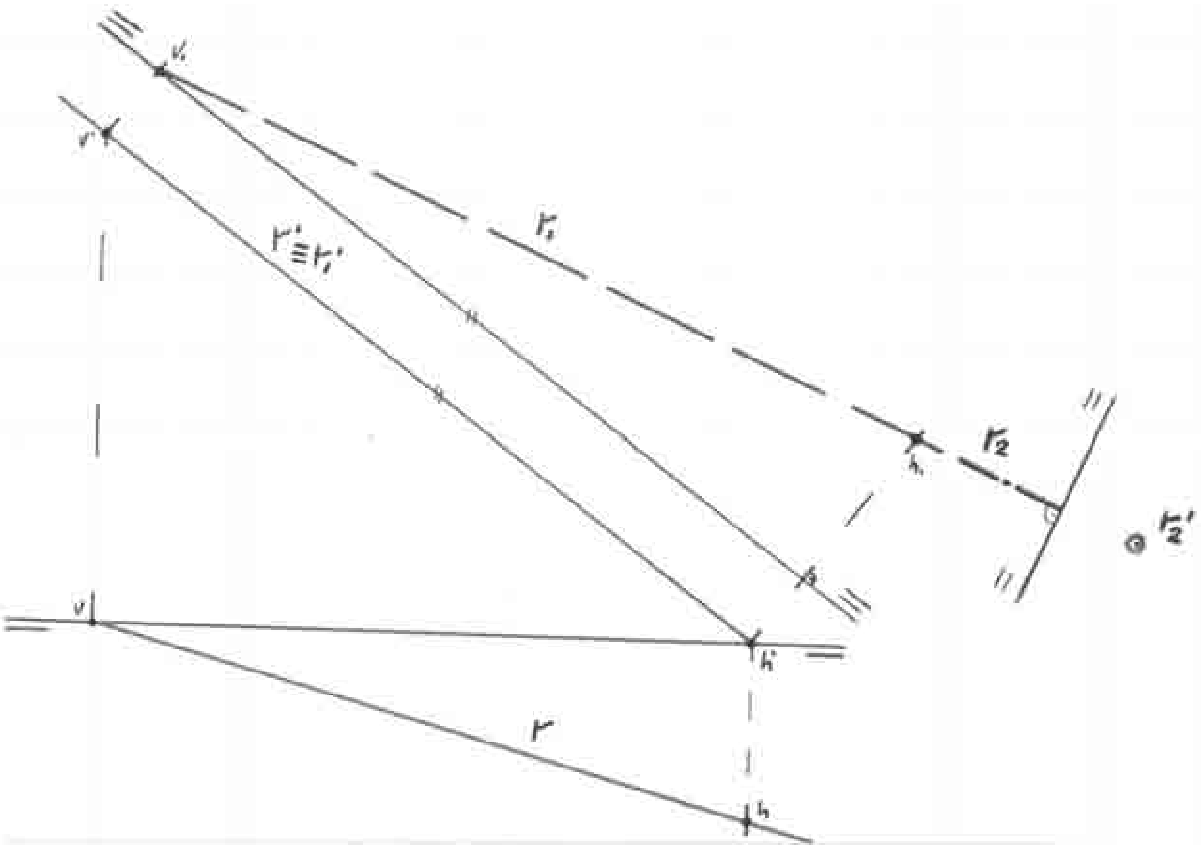
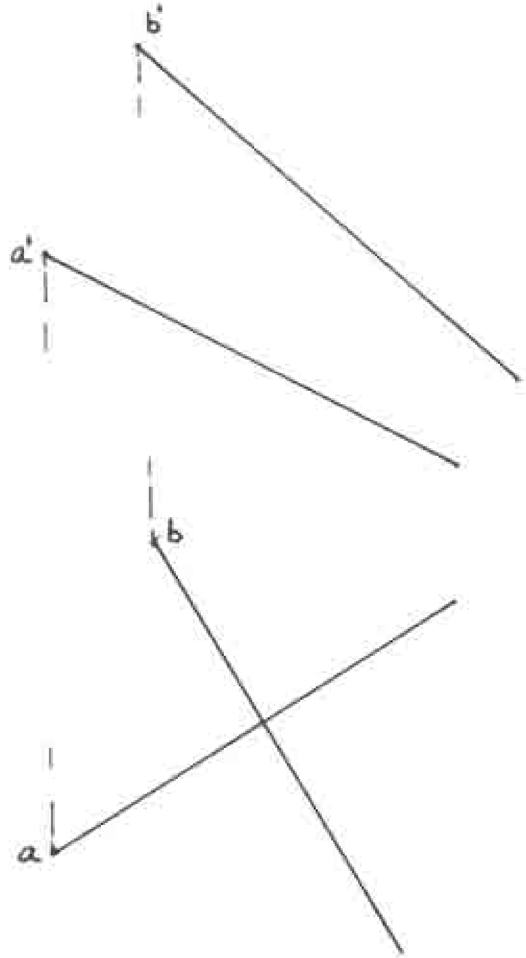
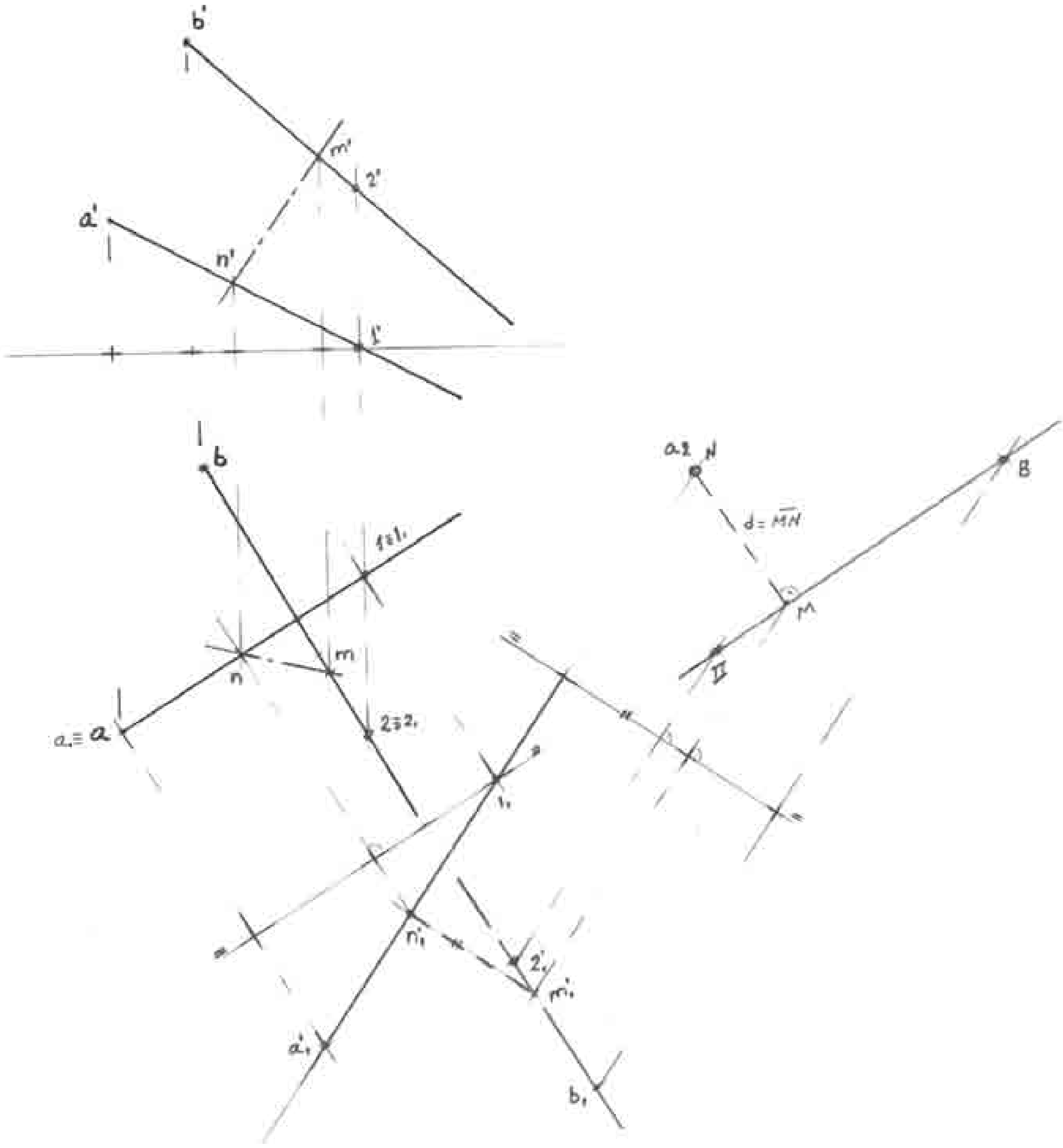


Fig. 73. Situar una recta cualquiera R como recta perpendicular al vertical.

Ejercicio.
Determinar la distancia, en posición y magnitud, entre los ejes de las tuberías A y B cuyas proyecciones se indican. (resolver mediante cambios de plano)

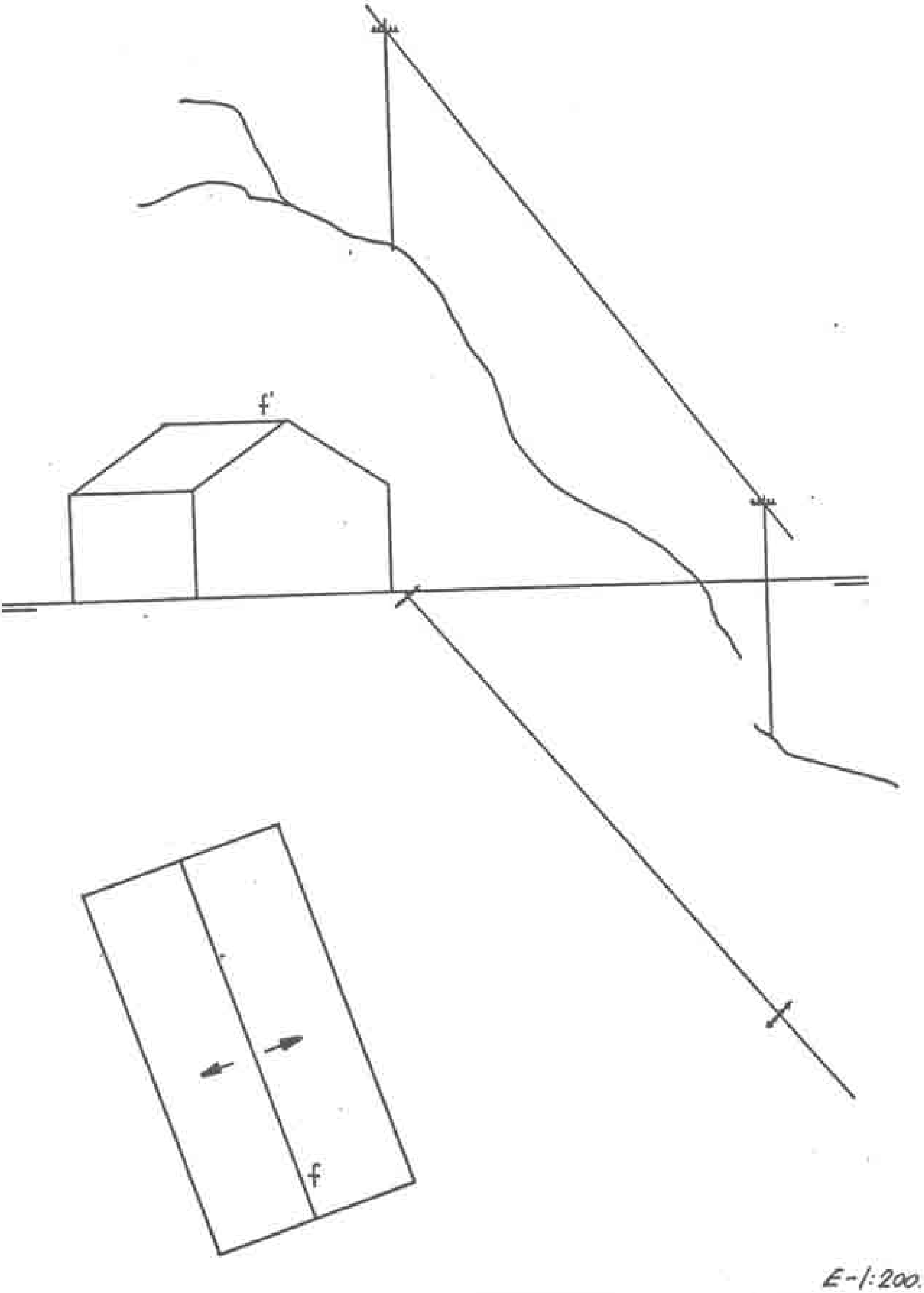


Solución.

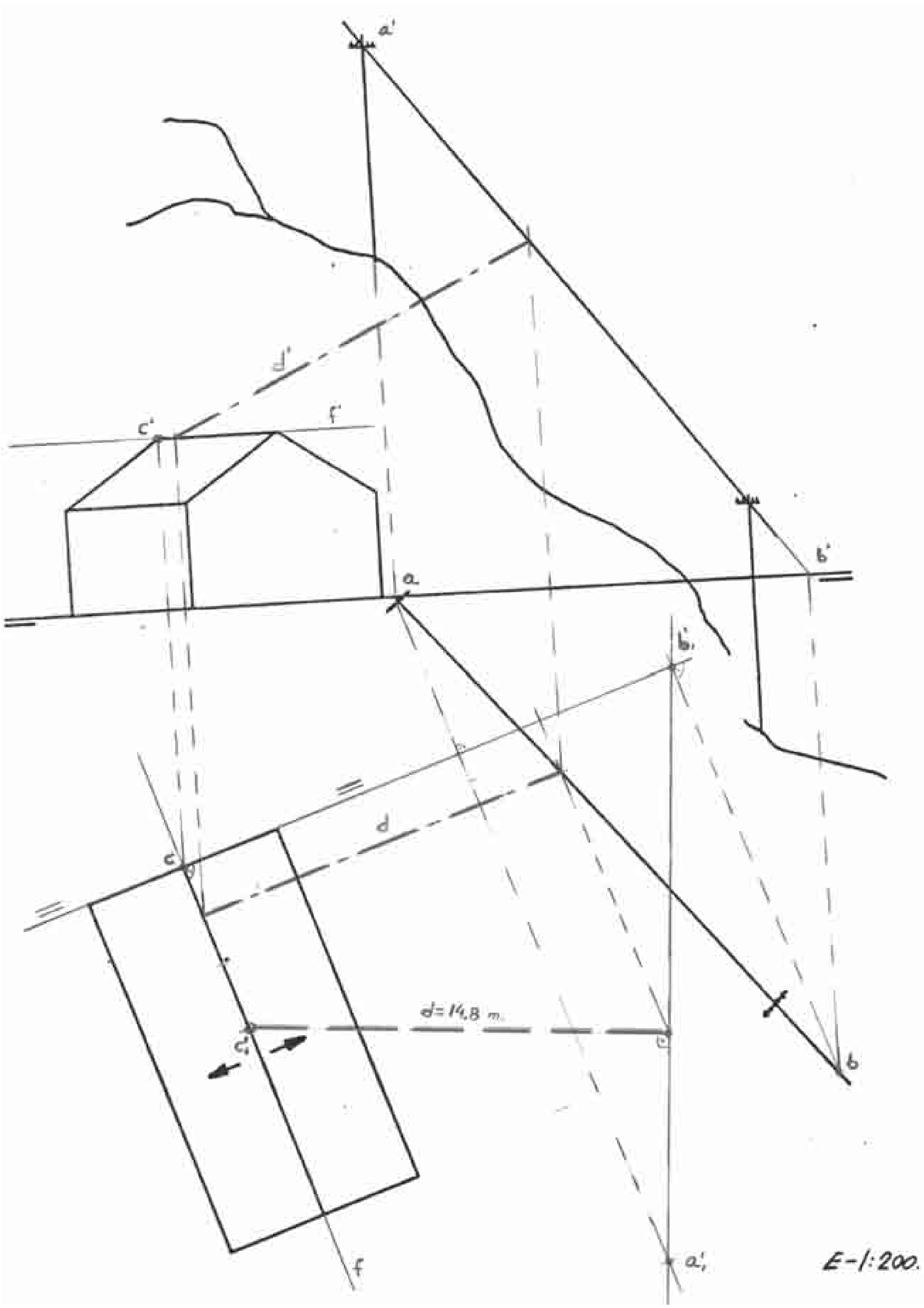


Ejercicio.

Determinar la mínima longitud del cable eléctrico (supuesto rectilíneo) necesario para realizar la acometida entre el tendido eléctrico y la cumbrera del edificio.
(resolver mediante cambios de plano)



Solución.



Nuevas trazas del plano al cambiar los planos de proyección.

Bastará cambiar, de acuerdo con lo visto,

-tres puntos del plano no alineados.

-un punto y una recta.

En la figura 74 se ha cambiado el plano vertical de proyección.

Para obtener la nueva traza del plano se ha cambiado un punto A y por las nuevas proyecciones de dicho punto se ha trazado una horizontal del nuevo plano.

Otro procedimiento consistirá en hallar las nuevas proyecciones del punto de la traza vertical cuya proyección horizontal coincide con la intersección de las dos líneas de tierra.

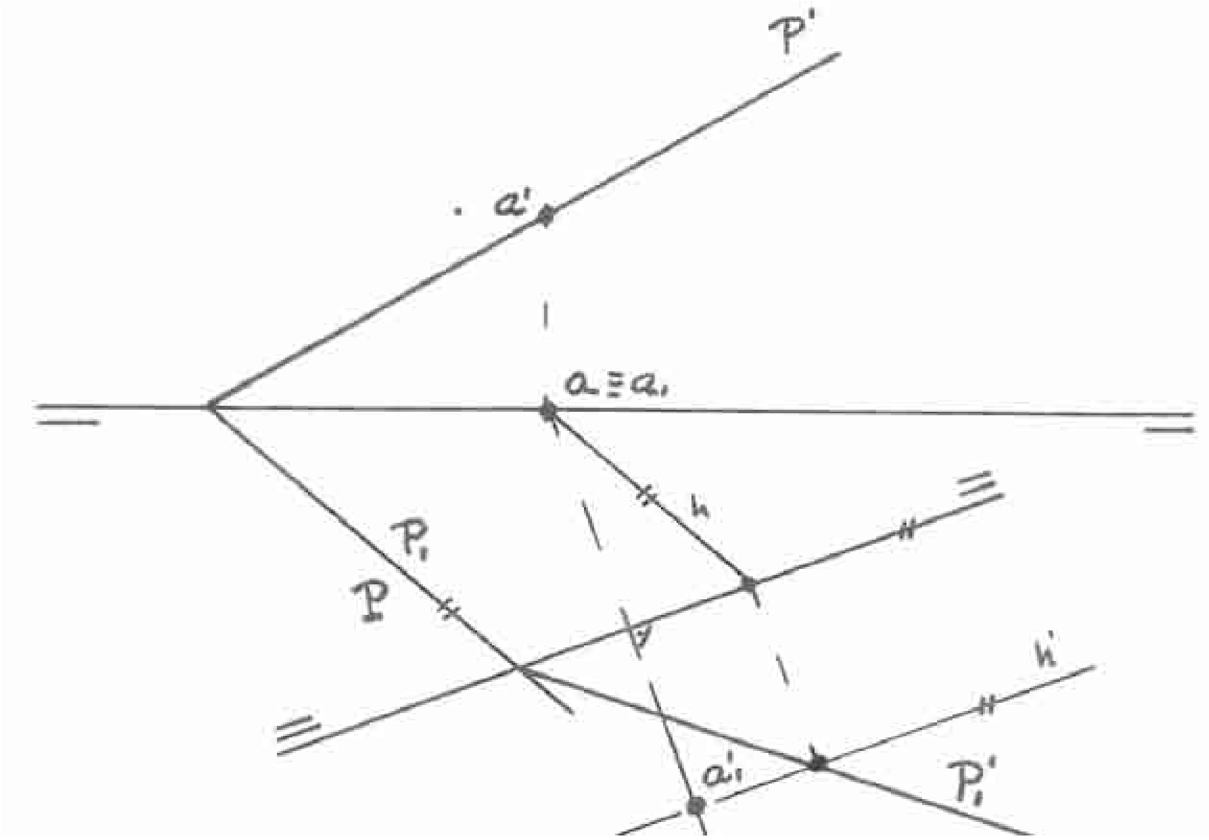


Fig. 74. Nuevas trazas del plano.

Resulta interesante situar un plano cualquiera en posiciones favorables: proyectante ó paralelo a los planos de proyección.

Las figuras que siguen indican con suficiente claridad las operaciones necesarias para conseguir dichas posiciones.

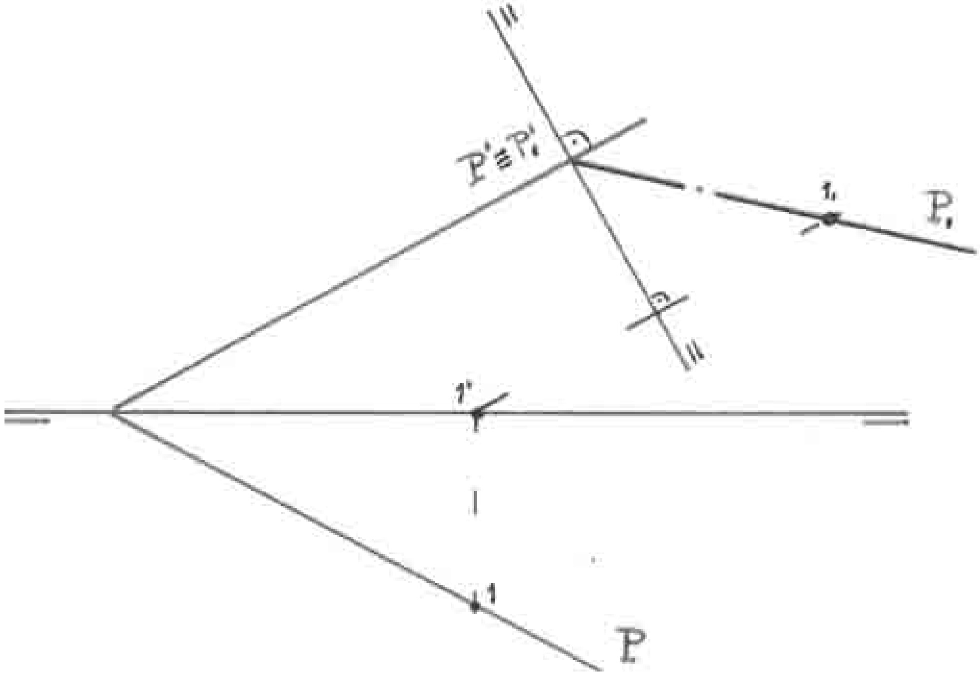


Fig. 75. Situar un plano cualquiera P como proyectante sobre el horizontal.

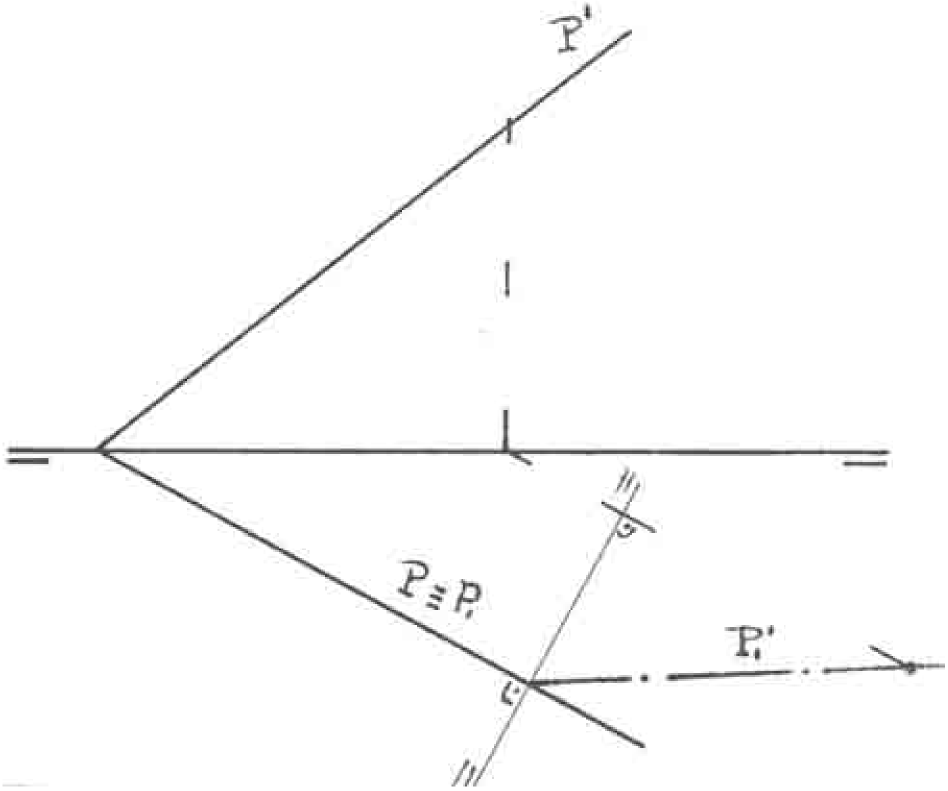


Fig. 76. Situar un plano cualquiera P como proyectante sbre el vertical.

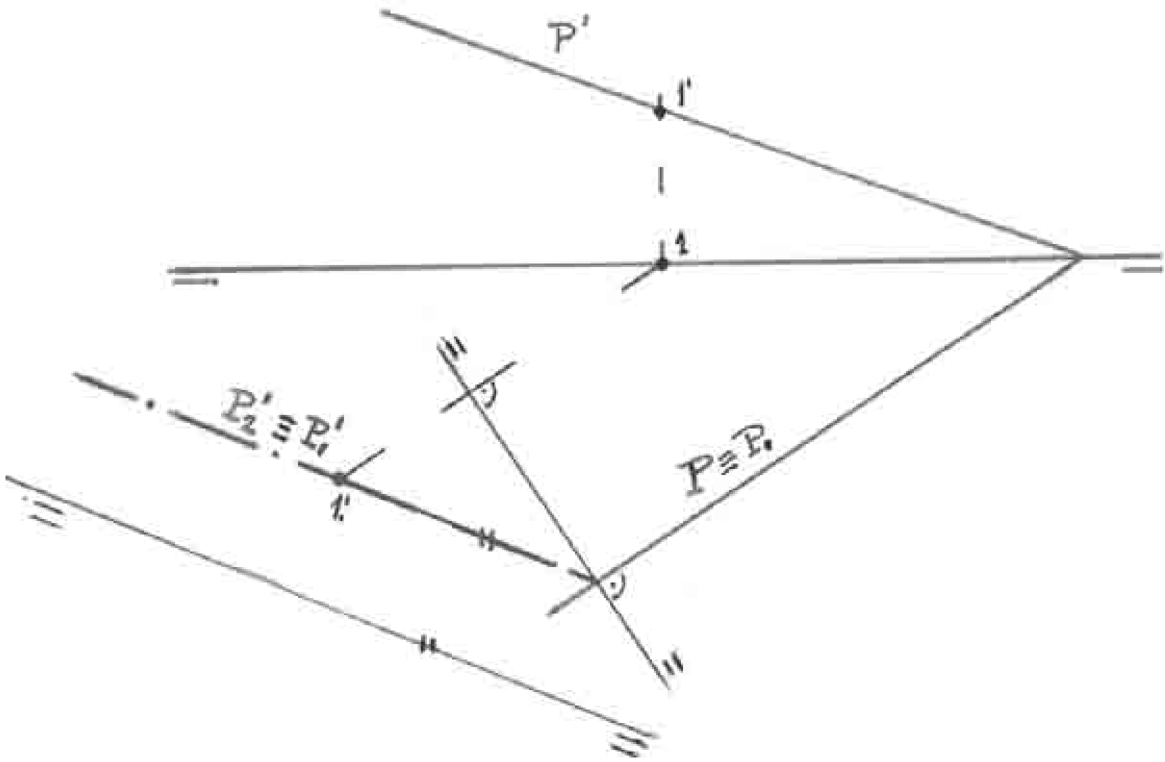


Fig. 77. Situar un plano cualquiera P como paralelo al horizontal.

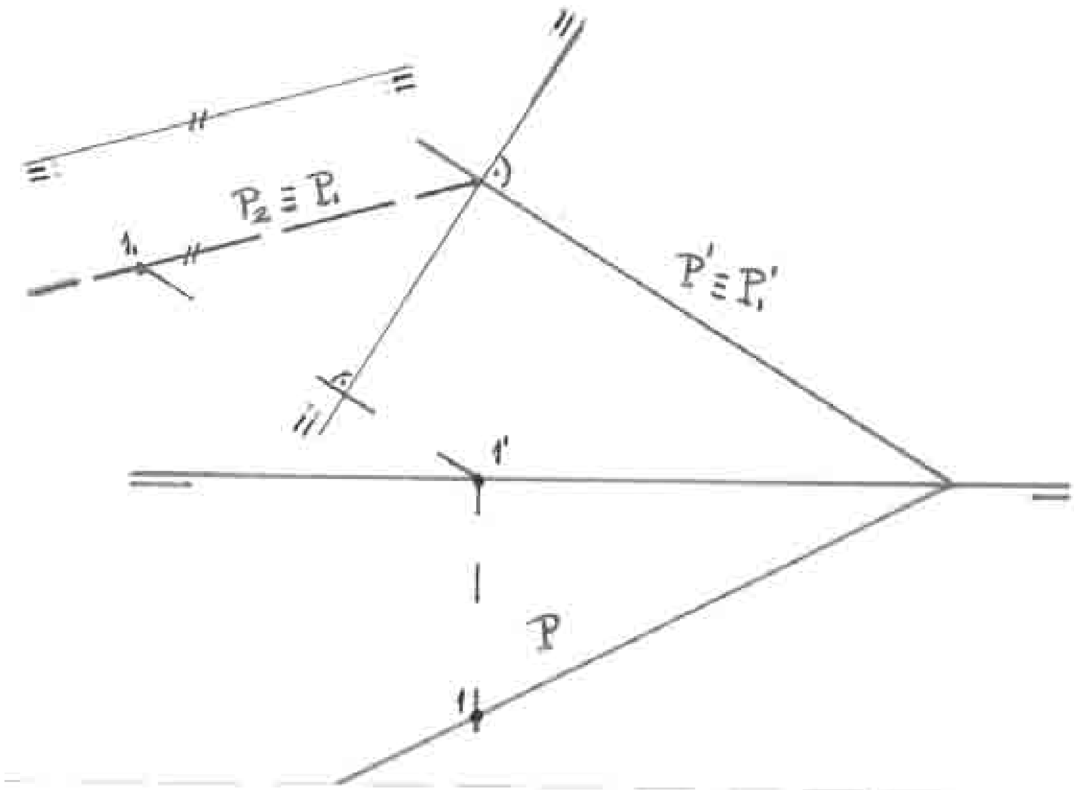


Fig. 78. Situar un plano cualquiera P como paralelo al vertical.

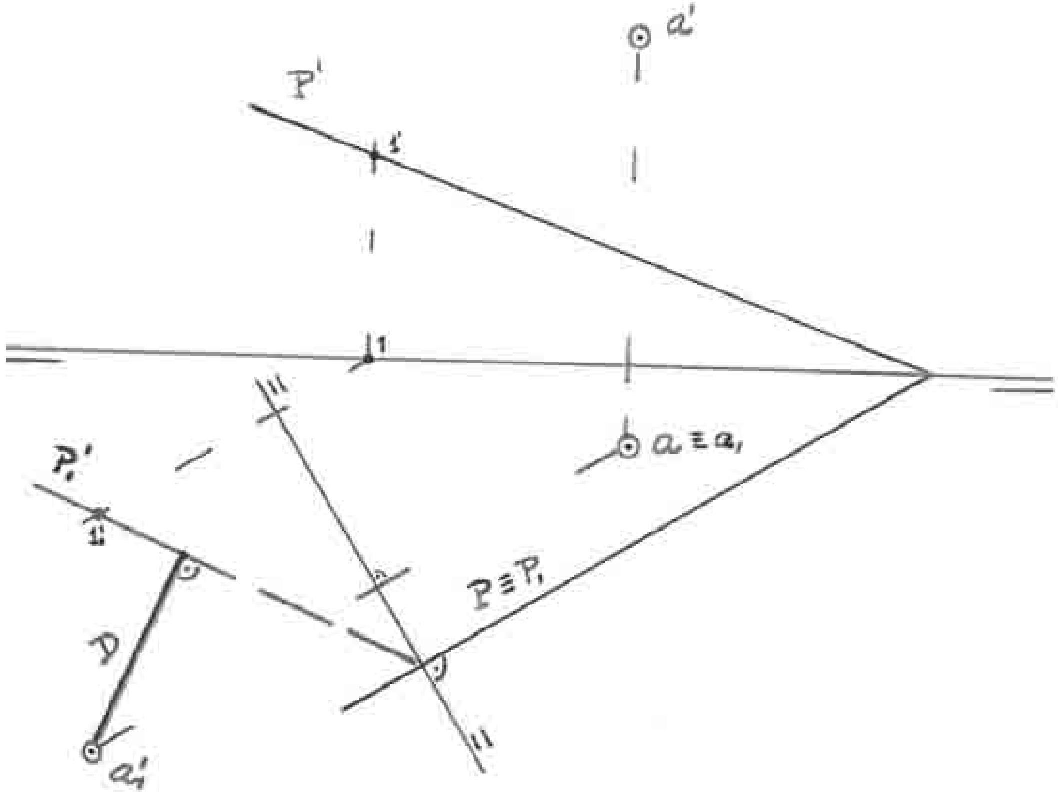


Fig. 78.1. Determinar la distancia de un punto A a un plano P.

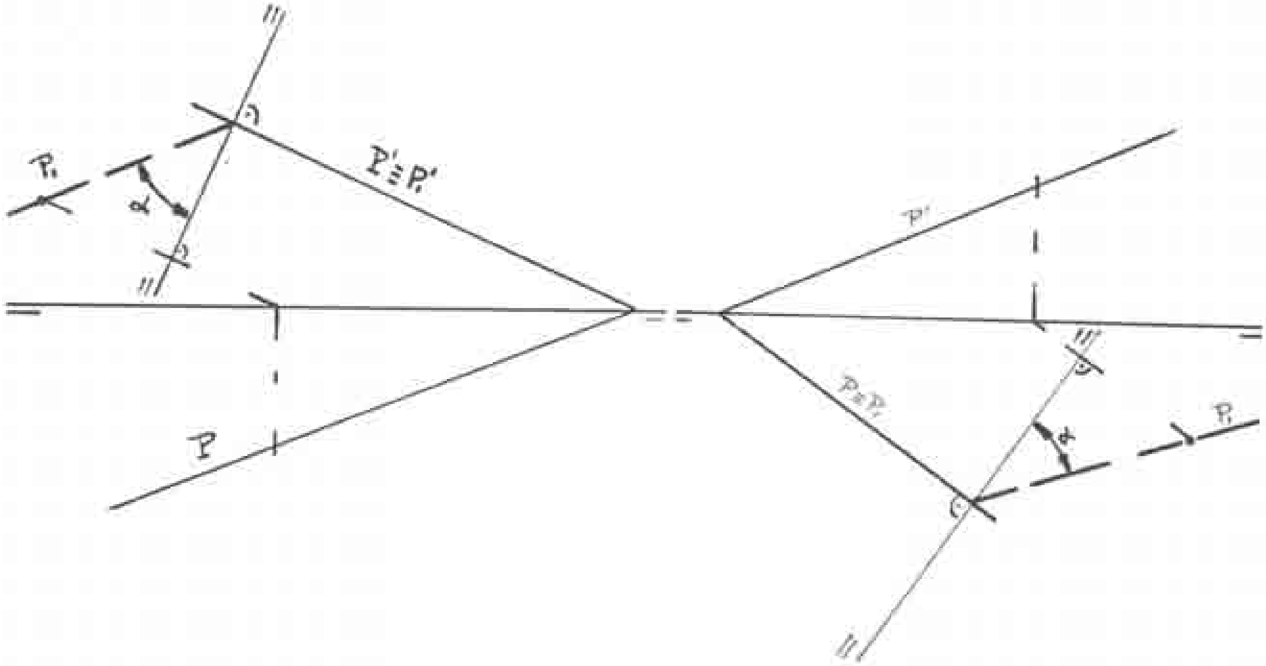
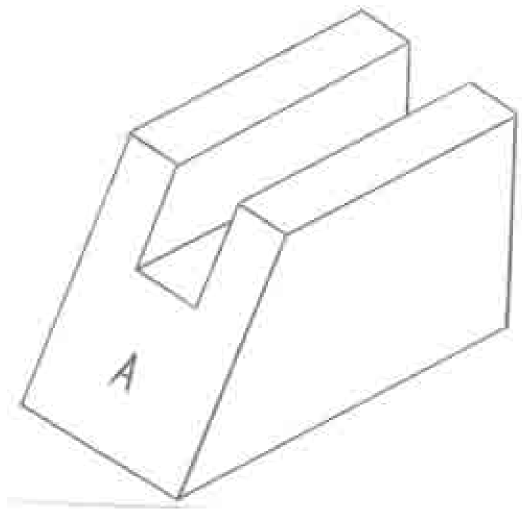


Fig. 78.2 Determinar el ángulo de un plano cualquiera con el vertical.

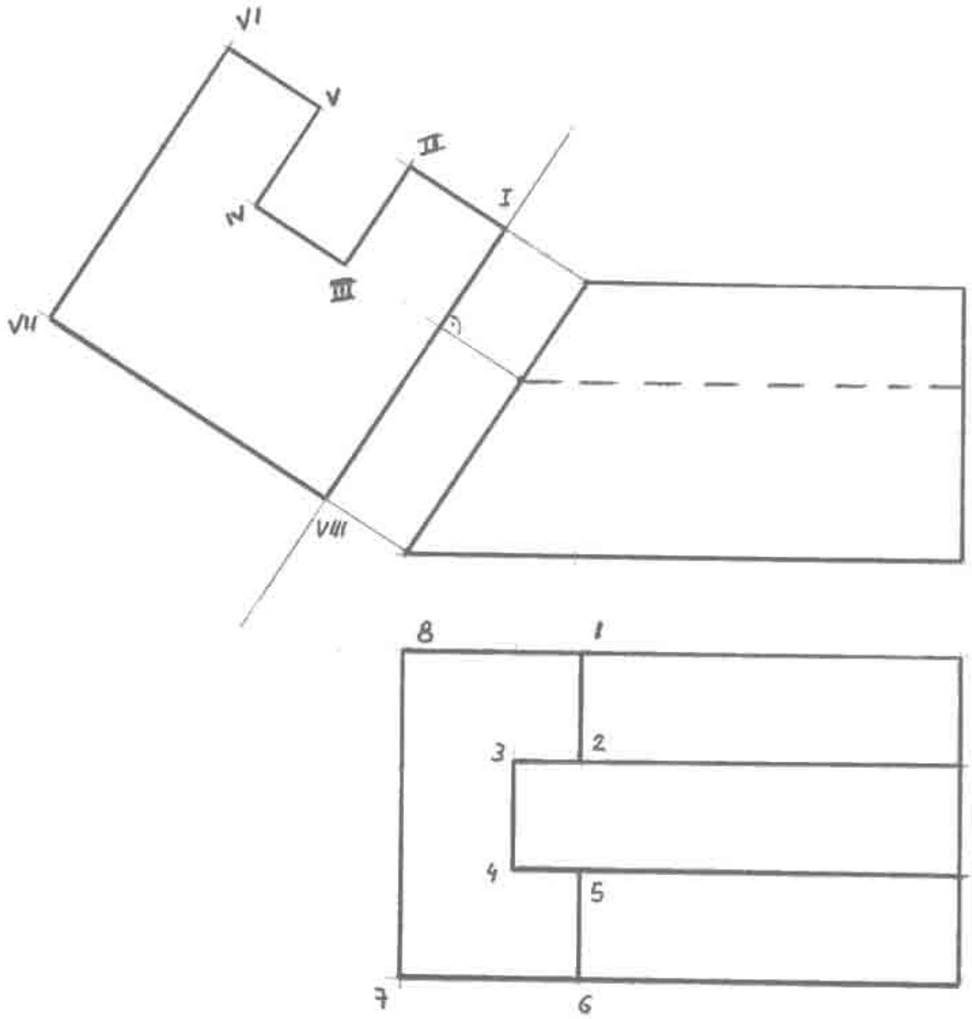
Fig. 78.3. Determinar el ángulo de un plano cualquiera con el horizontal.

Ejercicio.
En la pieza dada por su perspectiva isométrica determinar la verdadera forma y dimensiones de la cara A.



Solución.

1. Se determinan las vistas diédricas.
2. El plano de la cara se sitúa, mediante un cambio de plano, paralelo a un nuevo plano de proyección.



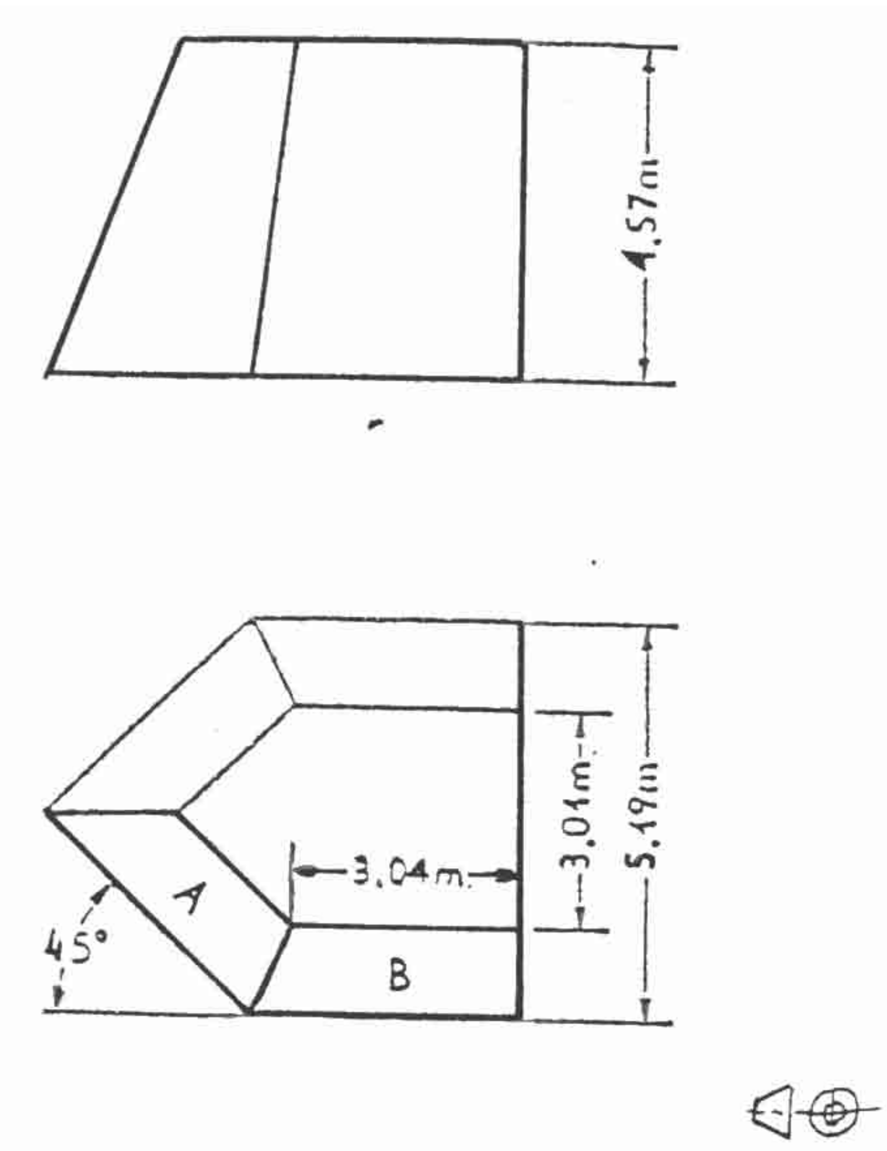
Ejercicio.

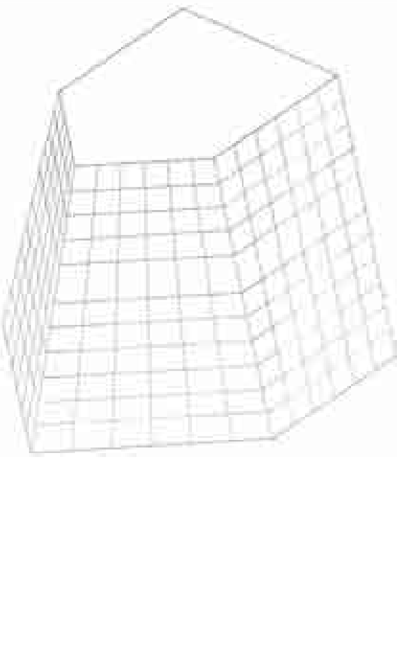
La figura dada representa una pila de hormigón armado de un puente.

Se pide.

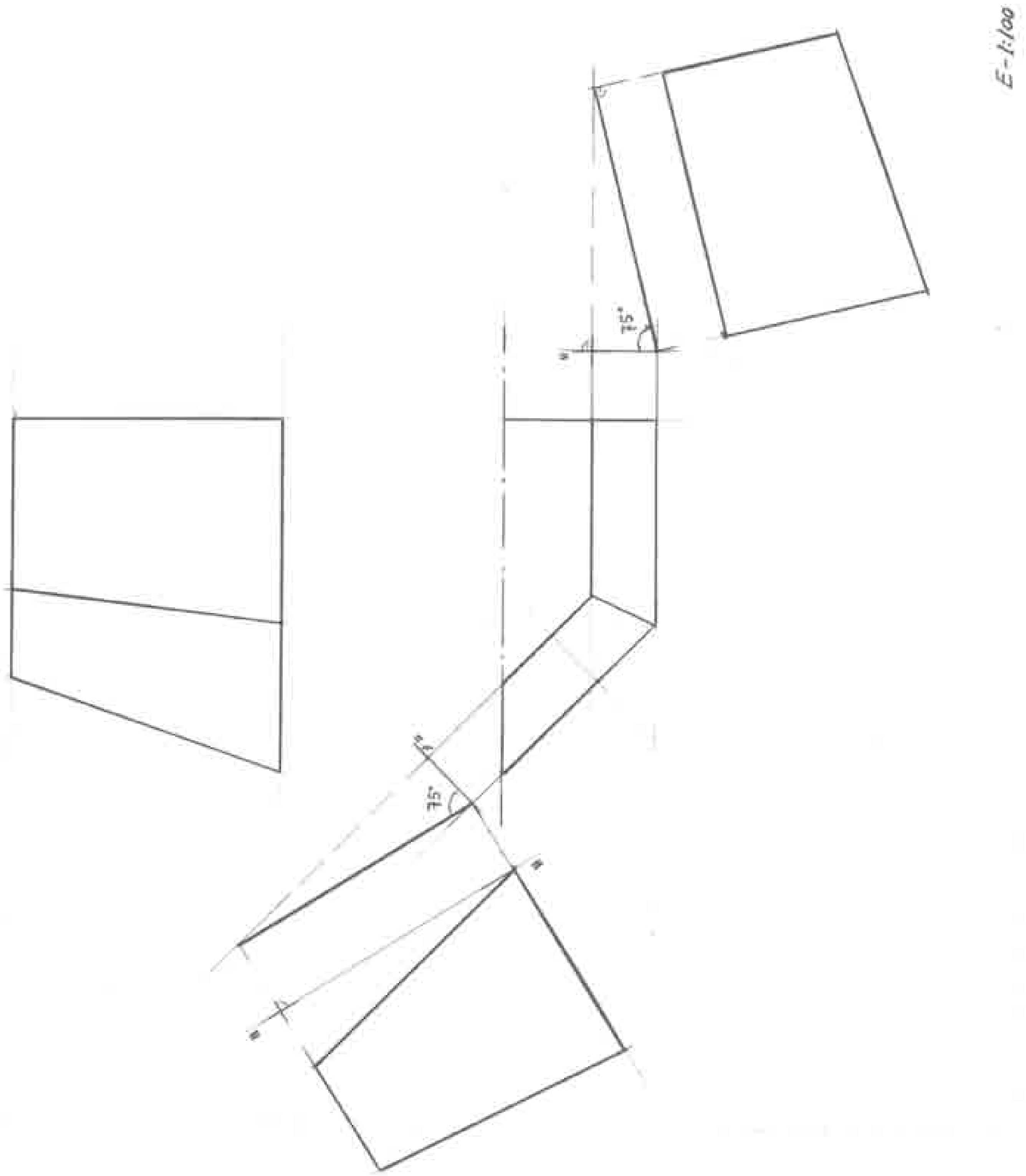
-Angulo que forman las superficies A y B con el plano horizontal.

-Verdadera forma y dimensiones de dichas superficies.





Solución.



11. GIROS.

Se trata, al igual que en los cambios de plano, de otro artificio empleado en G. Descriptiva.

En este caso los planos de proyección así como el eje de giro permanecen fijos; será la figura ó forma del espacio la que se desplaza girando hasta la posición deseada.

Para definir un giro es necesario conocer

-qué es lo que gira.
-alrededor de qué recta gira (eje de giro).
-en qué sentido gira.
-qué ángulo gira.

Giro de un punto.

Si un punto A (fig. 79) gira alrededor de una recta E (eje de giro) describirá una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje de giro.

El centro O de la circunferencia será la intersección del eje de giro E y el plano Q; el radio de la circunferencia de giro será la distancia OA del punto al eje.

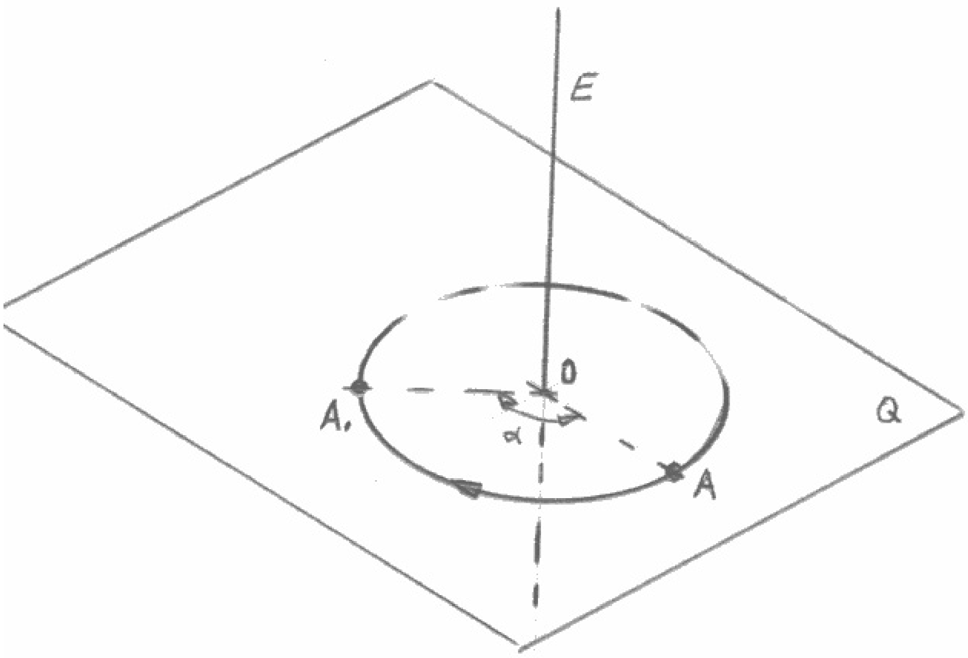


Fig. 79. Giro de un punto.

La fig. 80 representa el caso general de giro de un punto alrededor de un eje que ocupa una posición cualquiera; las operaciones necesarias para conseguir dicho giro son las siguientes:

1. Por el punto A se traza un plano Q perpendicular a la recta E.
2. Se determina el punto O: intersección del plano Q y la recta E.
3. Se abate el plano Q: puntos A y O.
4. Sobre la circunferencia de centro O y radio OA se toma el ángulo central α.
5. Se desabate el punto girado A_1.

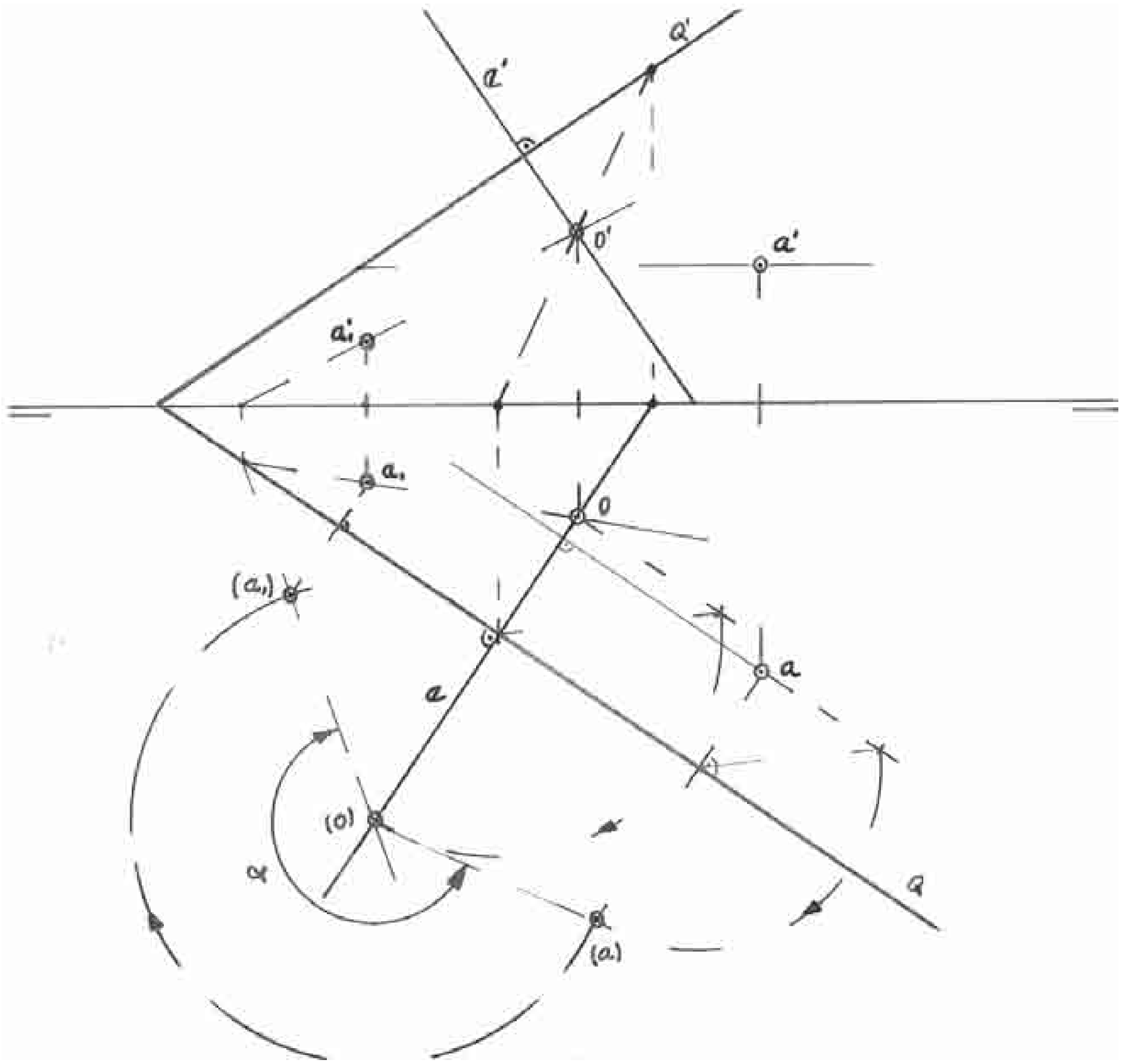


Fig. 80. Giro de un punto A alrededor de un eje cualquiera E.

Giro de un punto alrededor de un eje perpendicular a uno de los planos de proyección.

Se trata del caso más habitual de posición del eje de giro.

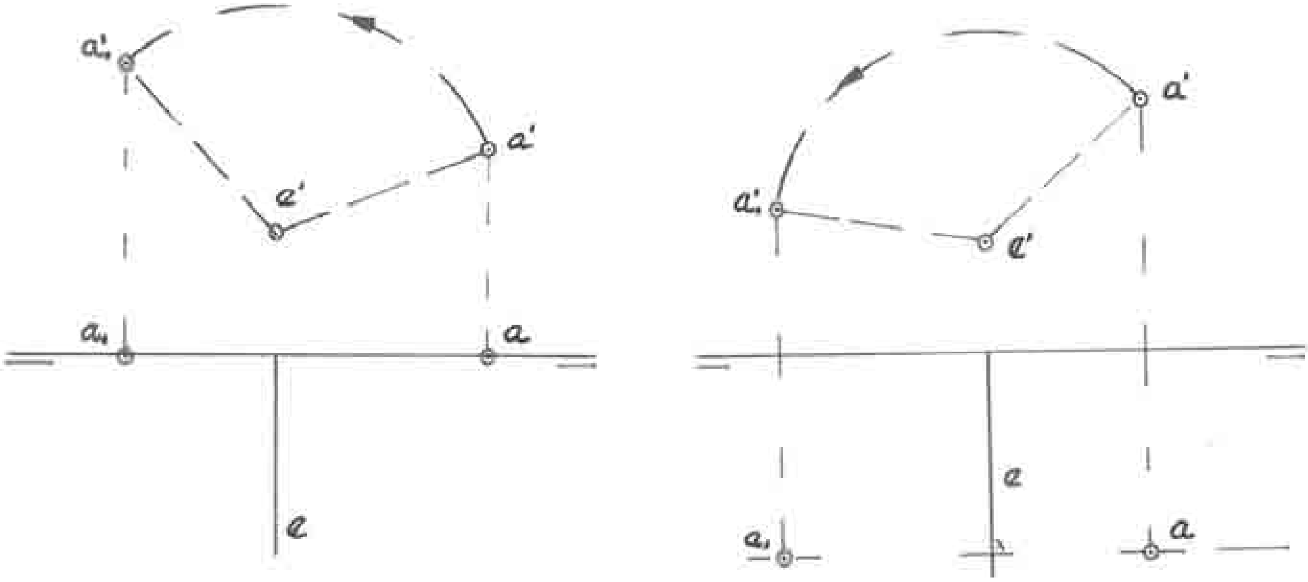


Fig. 81. Giro de un punto A alrededor de un eje E perpendicular al vertical de proyección.

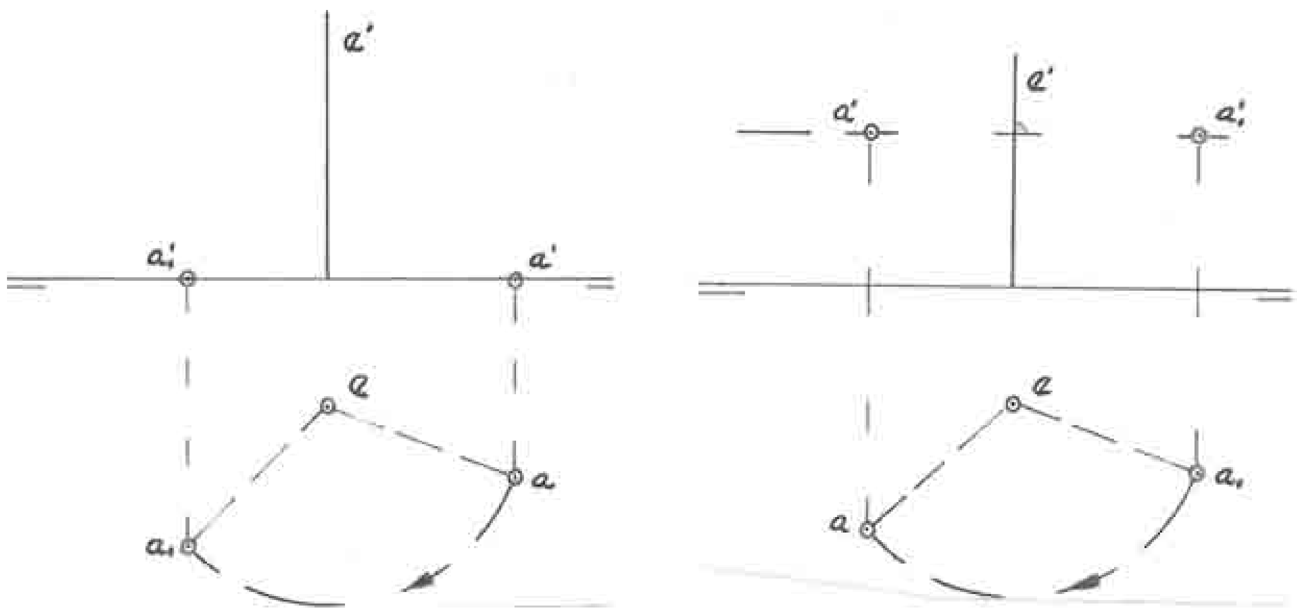


Fig. 82. Giro de un punto A alrededor de un eje E perpendicular al horizontal de proyección.

Giro de una recta alrededor de un eje perpendicular a uno de los planos de proyección.

Será suficiente con girar dos puntos cualesquiera de la recta como se indica en la fig. 83.

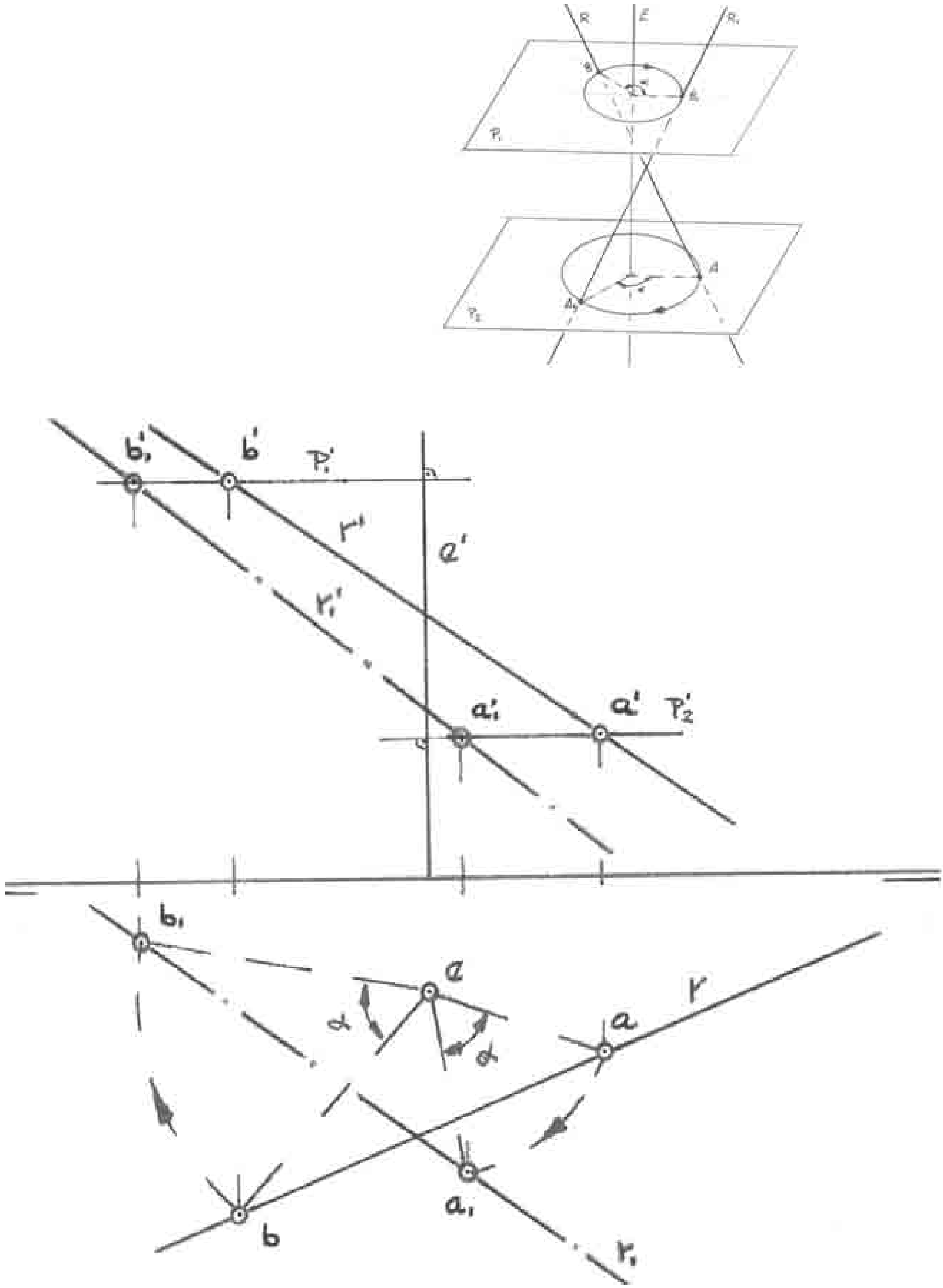


Fig. 83. Giro de una recta R alrededor de un eje E.

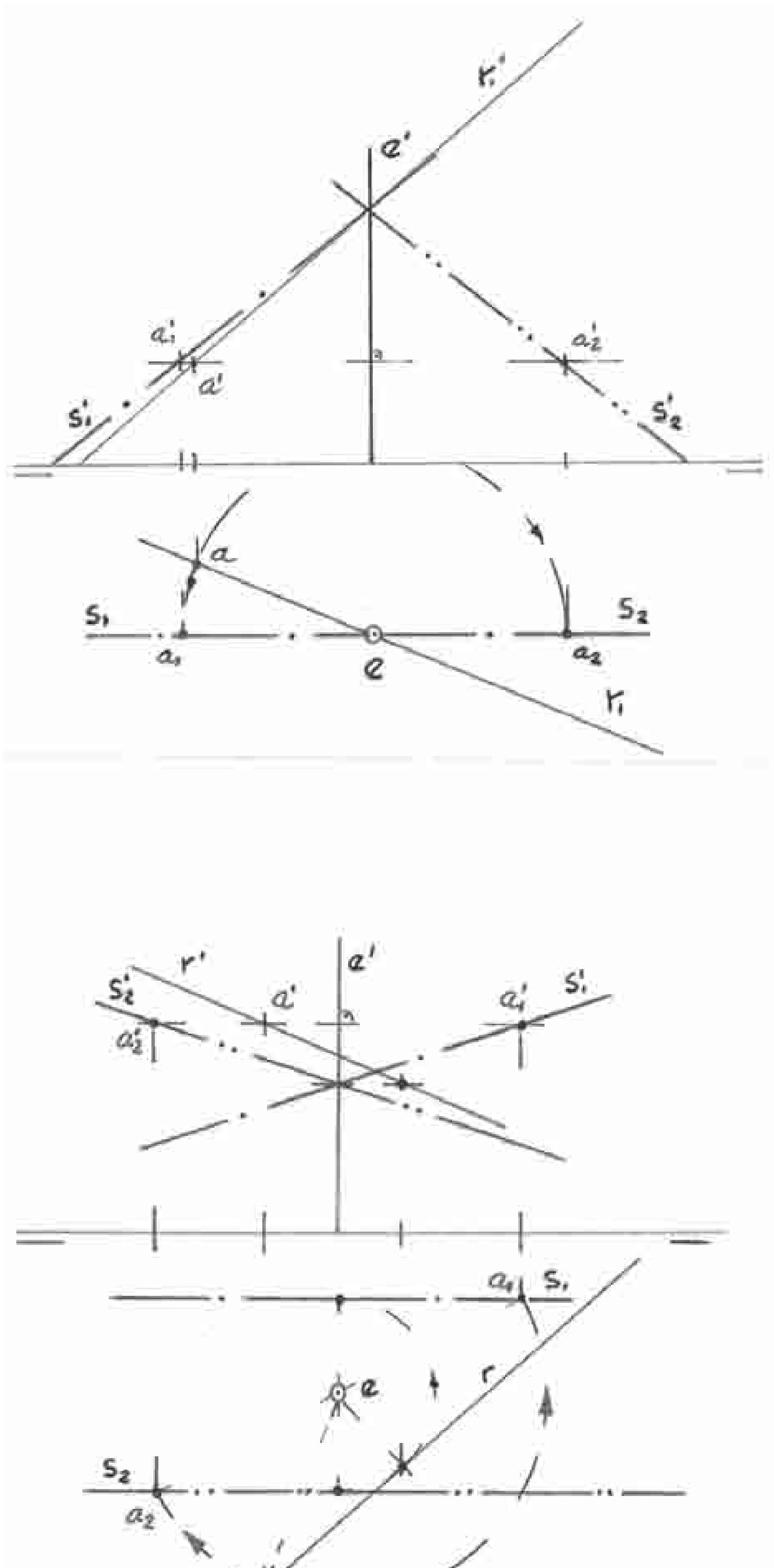


Fig. 84. Girar una recta R, alrededor de un eje E, hasta situarla como frontal.

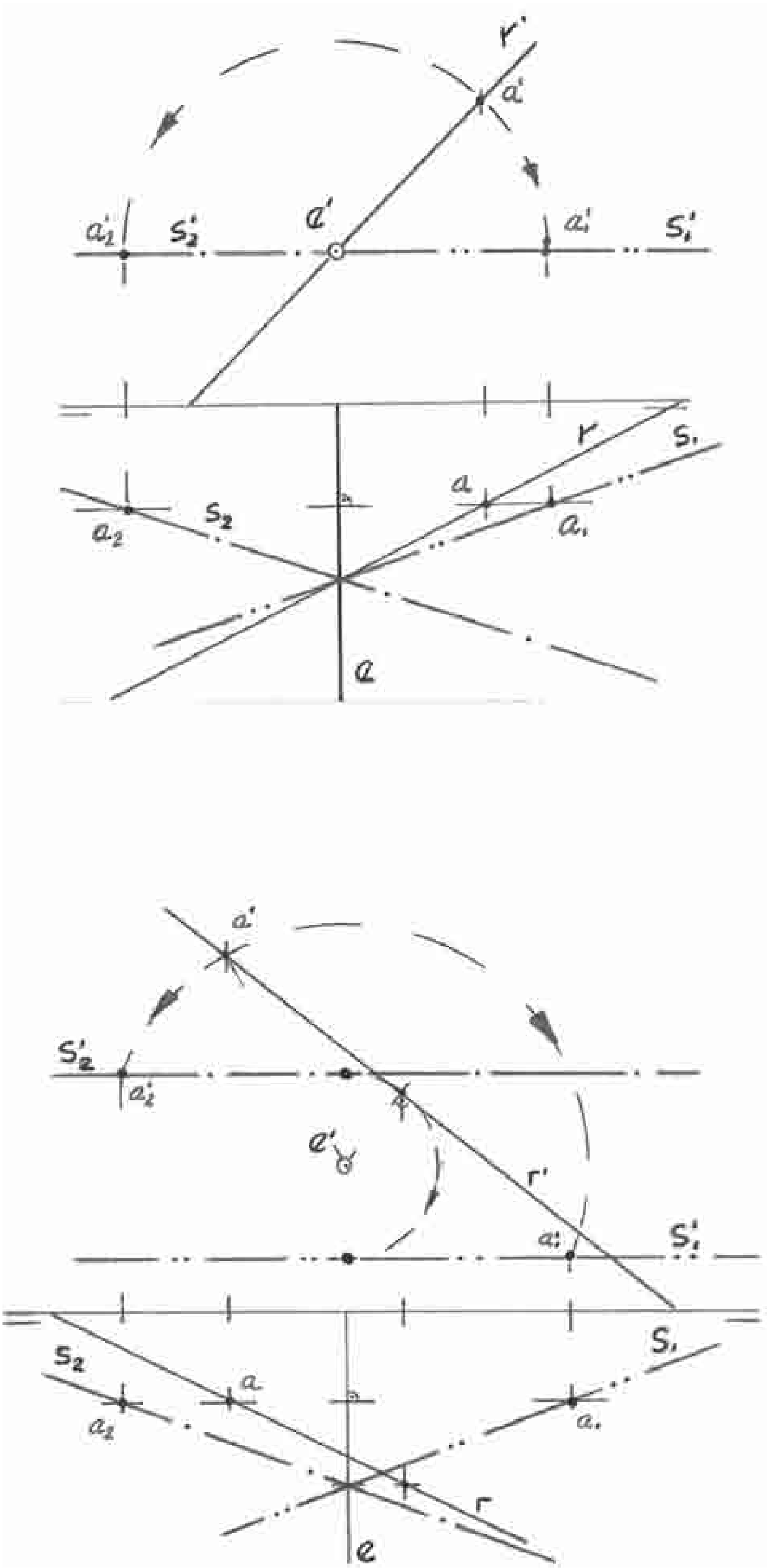


Fig. 85. Girar una recta R, alrededor de un eje E, hasta situarla como horizontal.

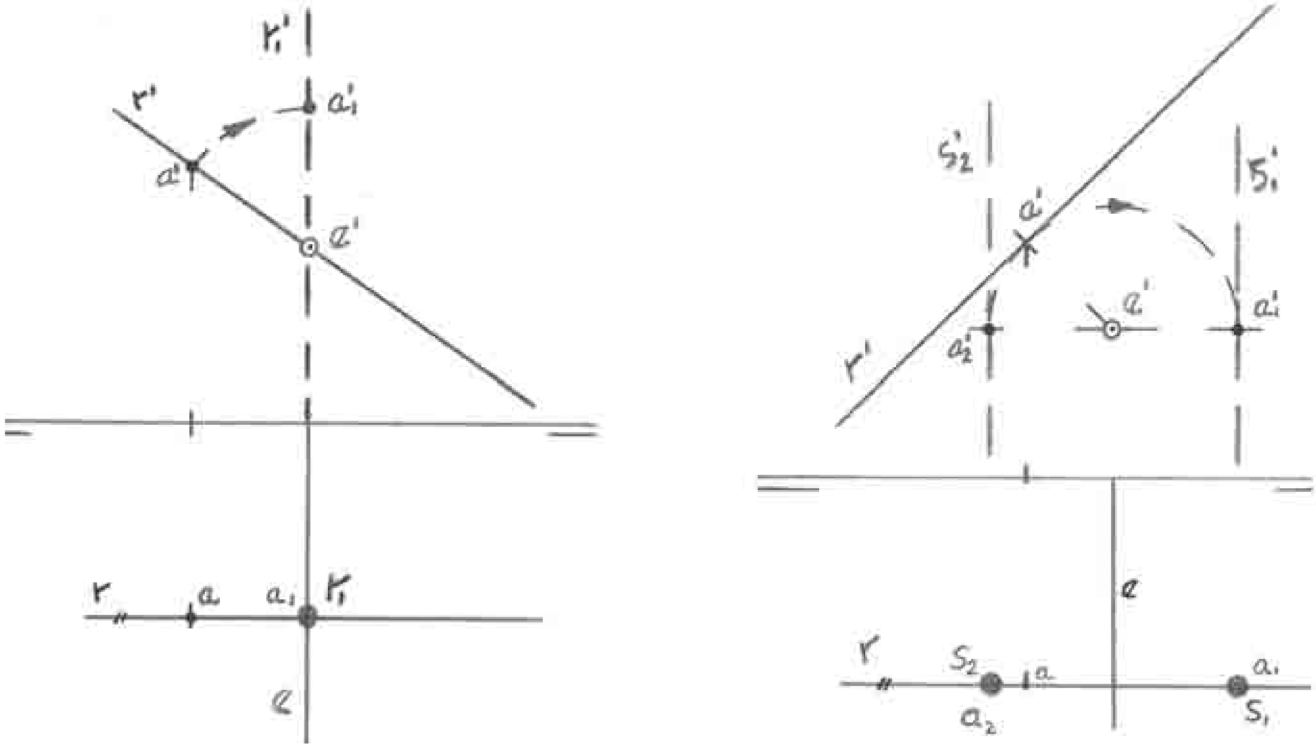


Fig. 86. Girar una recta R, alrededor de un eje E, hasta situarla como recta de punta sobre el horizontal.

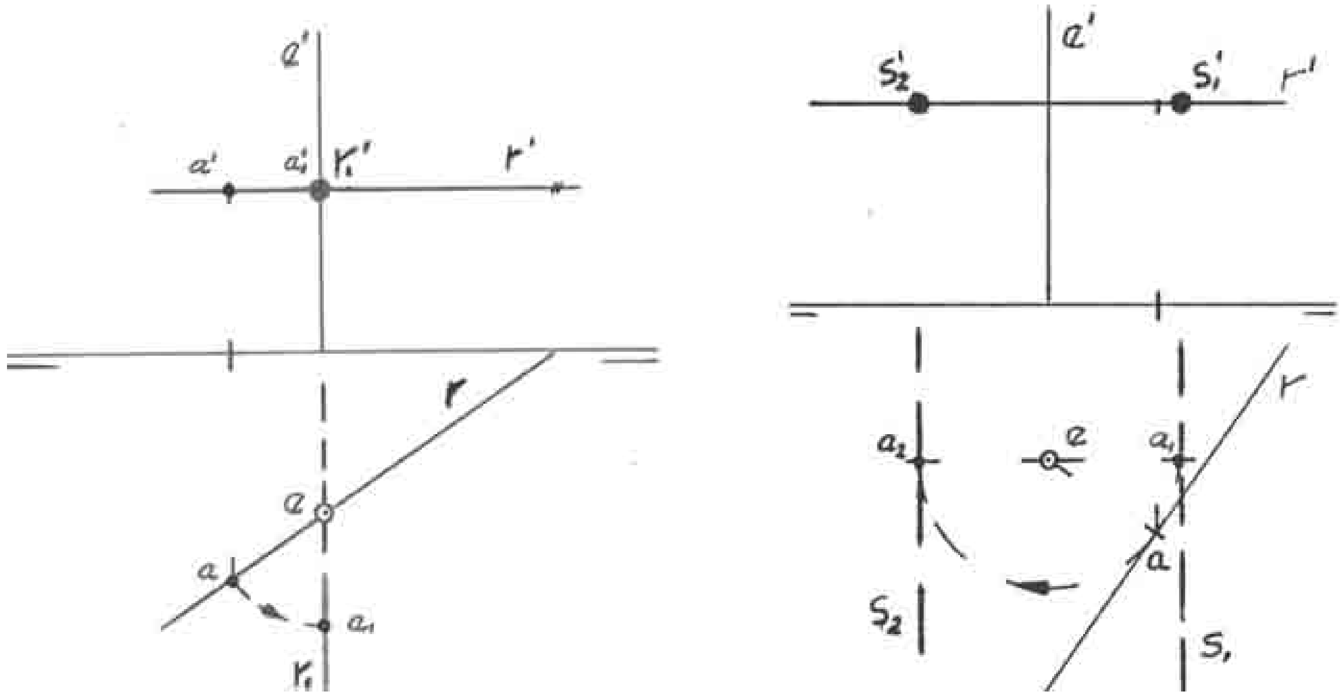


Fig. 87. Girar una recta R, alrededor de un eje E, hasta situarla como recta de punta sobre el vertical.

Giro de un plano alrededor de un eje perpendicular a uno de los planos de proyección.

Dado un plano cualquiera la nueva posición de dicho plano, al girar alrededor de un eje, se podrá obtener girando

-tres puntos del plano dado.
-un punto y una recta de dicho plano.
-dos rectas del plano.

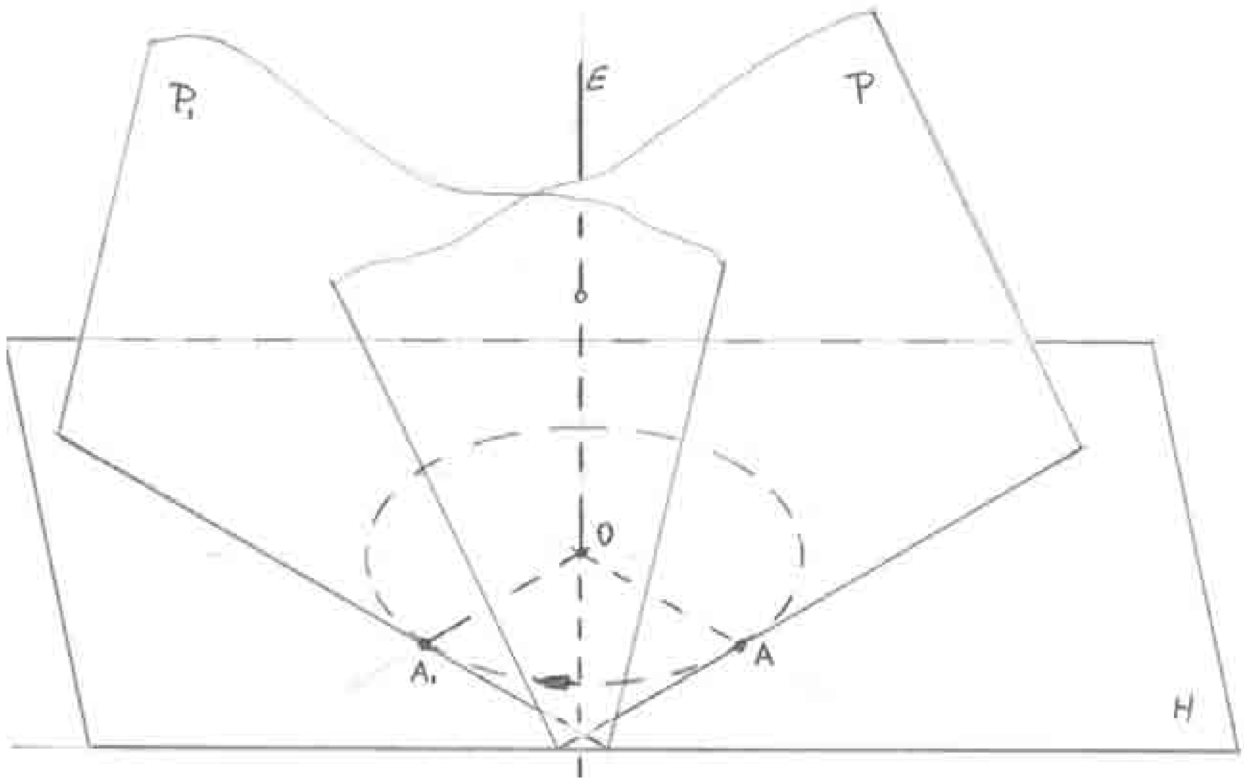


Fig. 88. Giro de un plano alrededor de un eje.

Si el eje es una recta de punta el método más utilizado, por lo rápido y sencillo, consiste en gi-rar la traza del plano con el horizontal ó el vertical; la nueva posición del plano vendrá dada por la traza girada y el punto de intersección del plano y el eje.

Suele interesar situar un plano cualquiera en posiciones favorables: proyectante ó paralelo a los planos de proyección.

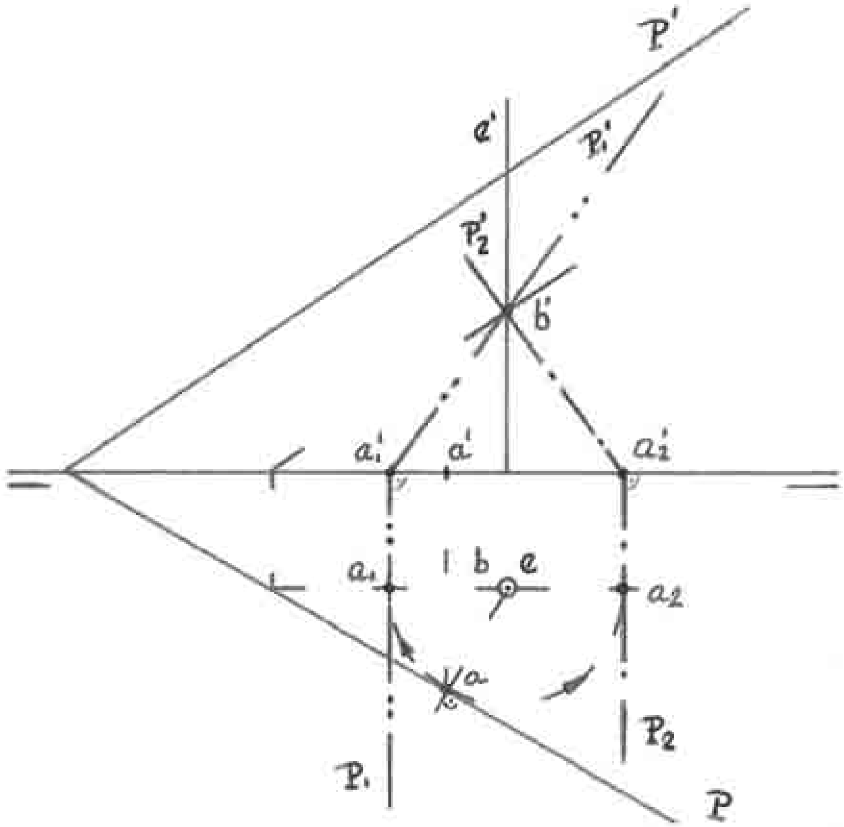


Fig. 89. Plano situado como proyectante sobre el vertical.

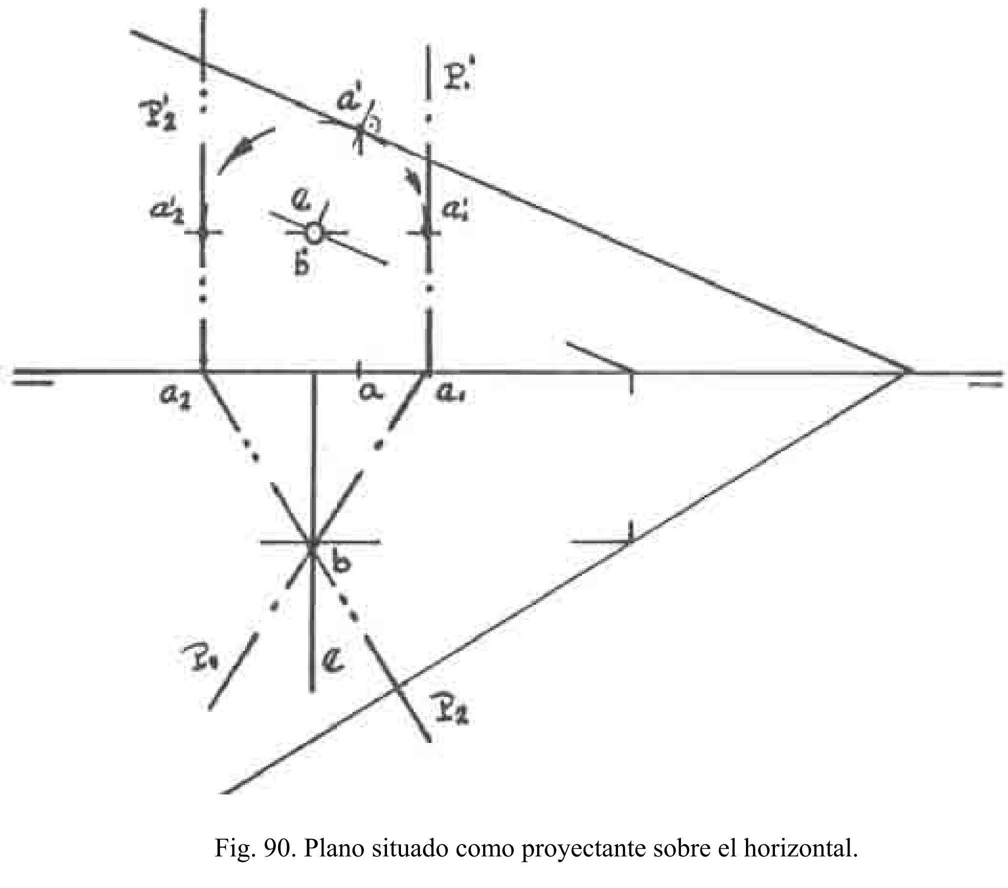


Fig. 90. Plano situado como proyectante sobre el horizontal.

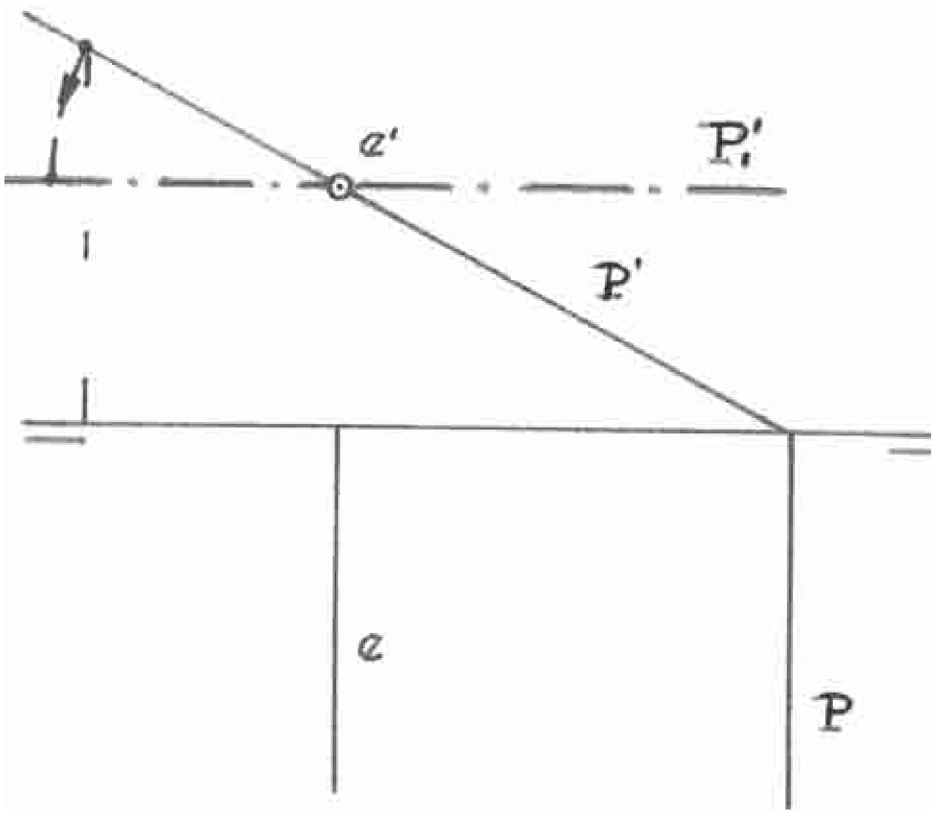


Fig. 91. Plano paralelo al horizontal.

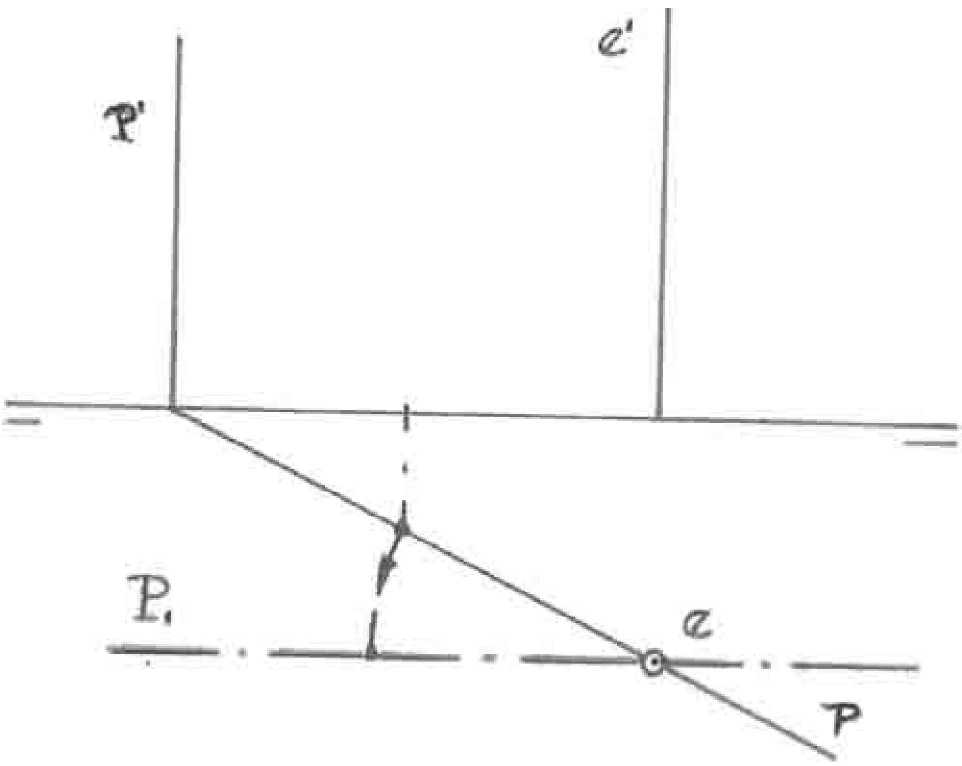


Fig. 92. Plano paralelo al vertical.

12. ABATIMIENTOS.

Abatir un plano P, sobre otro plano π, consiste en girar el plano P alrededor de la recta de intersección de ambos hasta hacerlo coincidir con el plano π.

La recta de giro se denomina charnela y el plano π plano de abatimiento.

Se trata, por tanto, de un artificio más de los usados en G. Descriptiva; como plano de abatimiento se toma uno de los de proyección ó paralelo a ellos. De esta manera se podrá trabajar sobre el dibujo con todos los elementos que contenga el plano que se abate en verdadera magnitud.

Hay que hacer notar que lo que se abate es un plano, esto es, cualquier punto ó recta contenidos en el plano.

En el abatimiento (fig. 93) hay que especificar

- -qué plano se abate.
- -sobre qué plano se abate.
- -alrededor de qué recta (charnela) se gira.
- -qué sentido de giro se toma.

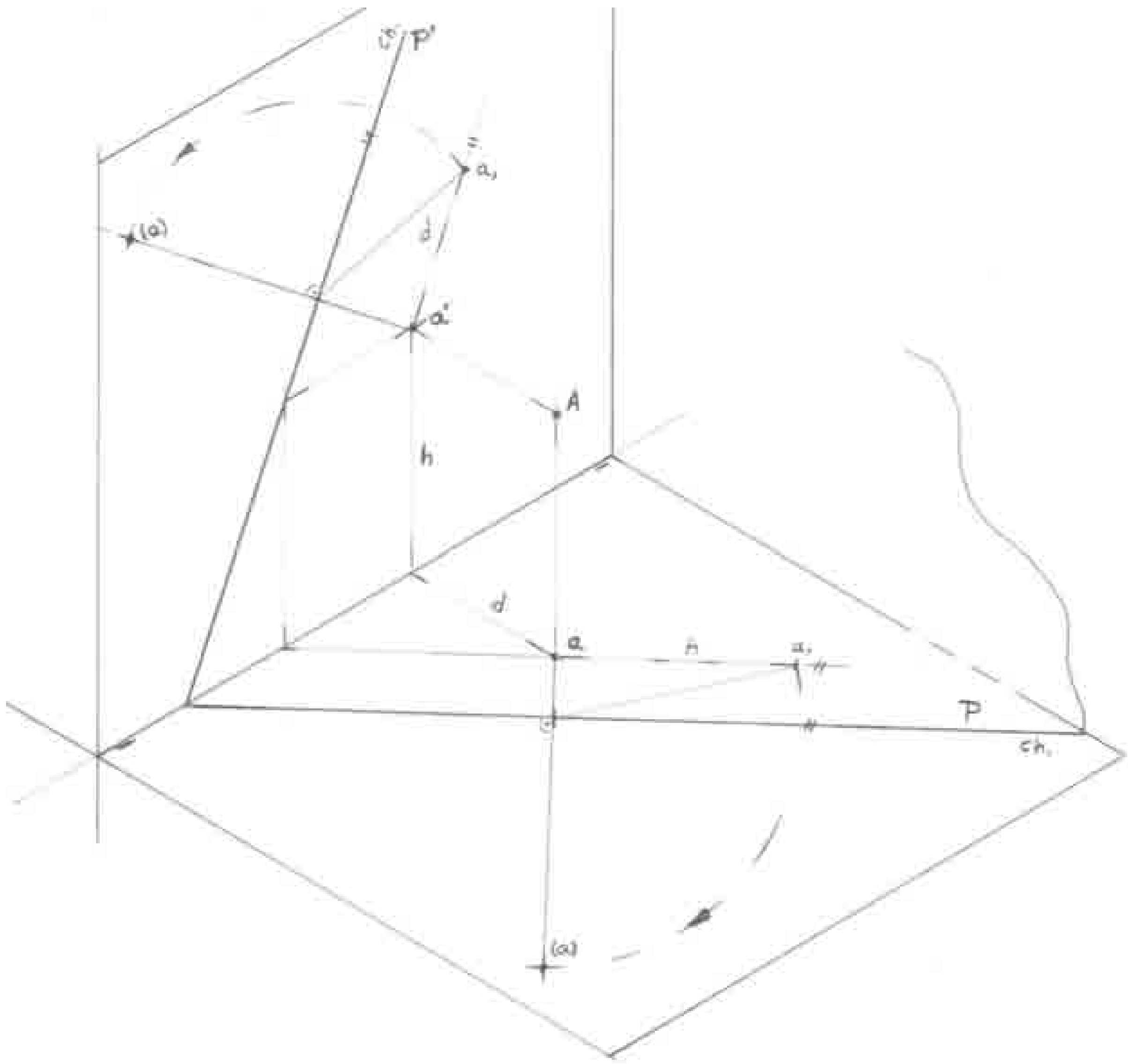


Fig. 93. Abatimiento de un plano.

Abatimiento de un punto.

Sea un punto A del plano P que se va a abatir sobre el plano π.

Al girar el plano P alrededor de la charnela el punto describe una circunferencia, situada en un plano perpendicular a la misma, de centro O y radio OA, siendo A_1 y A_2 las posiciones del punto abatido.

Si proyectamos el punto A sobre el plano π se puede observar que el triángulo rectángulo Oaa_1 es igual al Oaa; se establece así el procedimiento para abatir un punto sobre el plano horizontal de proyección:

1. Por la proyección horizontal del punto se traza una perpendicular y una paralela a la charnela.
2. Sobre la paralela se toma una distancia igual a la cota del punto.
3. Con centro en O y radio Oa_1 se traza un arco que cortará a la perpendicular en el punto (a) que será el abatimiento pedido.

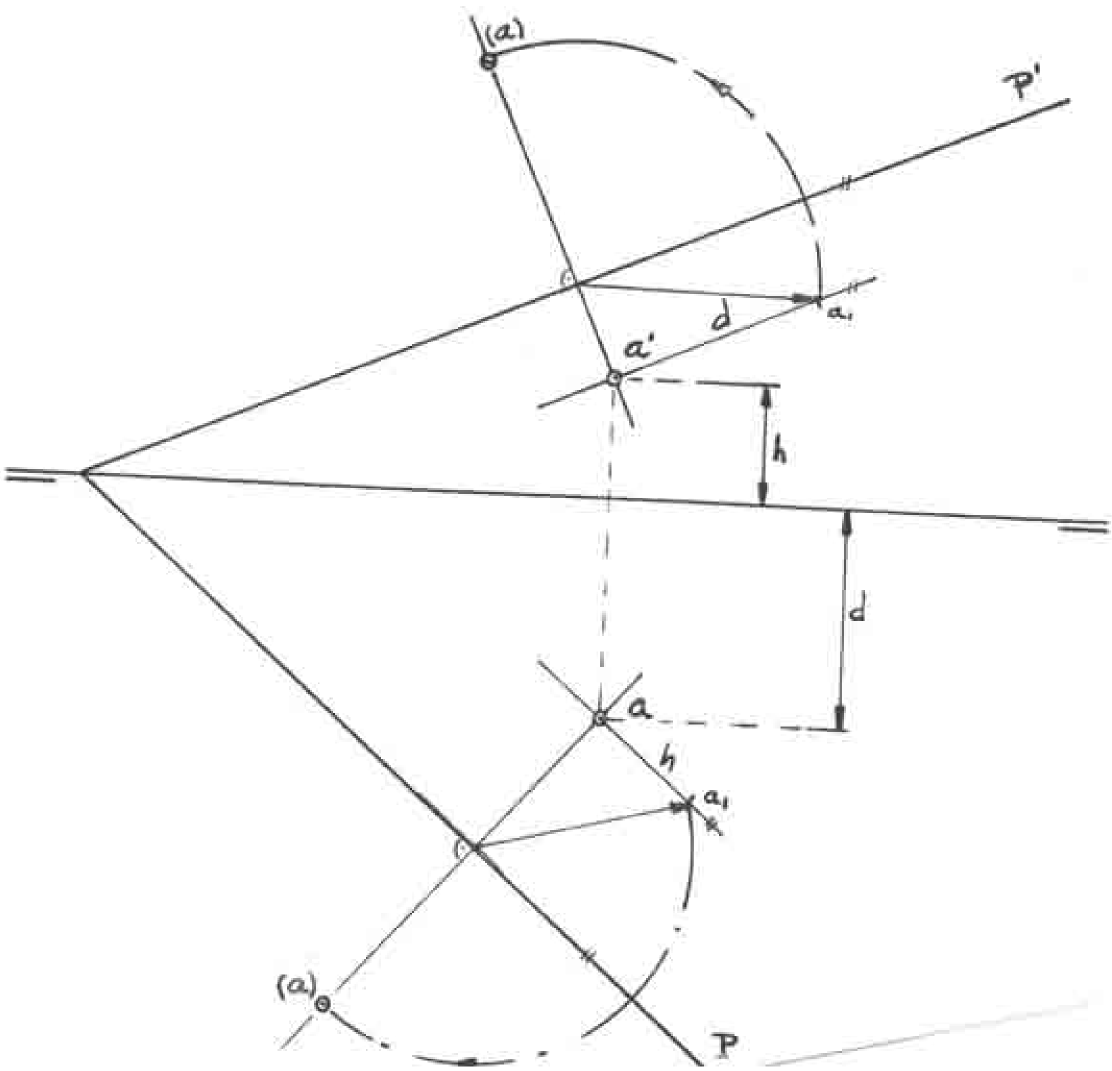


Fig. 94. Abatimiento de un punto.

El mismo procedimiento sirve para abatir sobre el vertical. (tomando el alejamiento del punto en vez de su cota)

Abatimiento de una recta.

Para abatir una recta es suficiente con abatir dos puntos cualesquiera de ella.

Para mayor facilidad uno de los puntos puede ser el situado sobre la charnela, esto es, sobre la traza horizontal ó vertical del plano que se abate, según se tome como plano de abatimiento el horizontal ó el vertical, respectivamente.

(En la fig. 95 para abatir la recta se han abatido sus trazas)

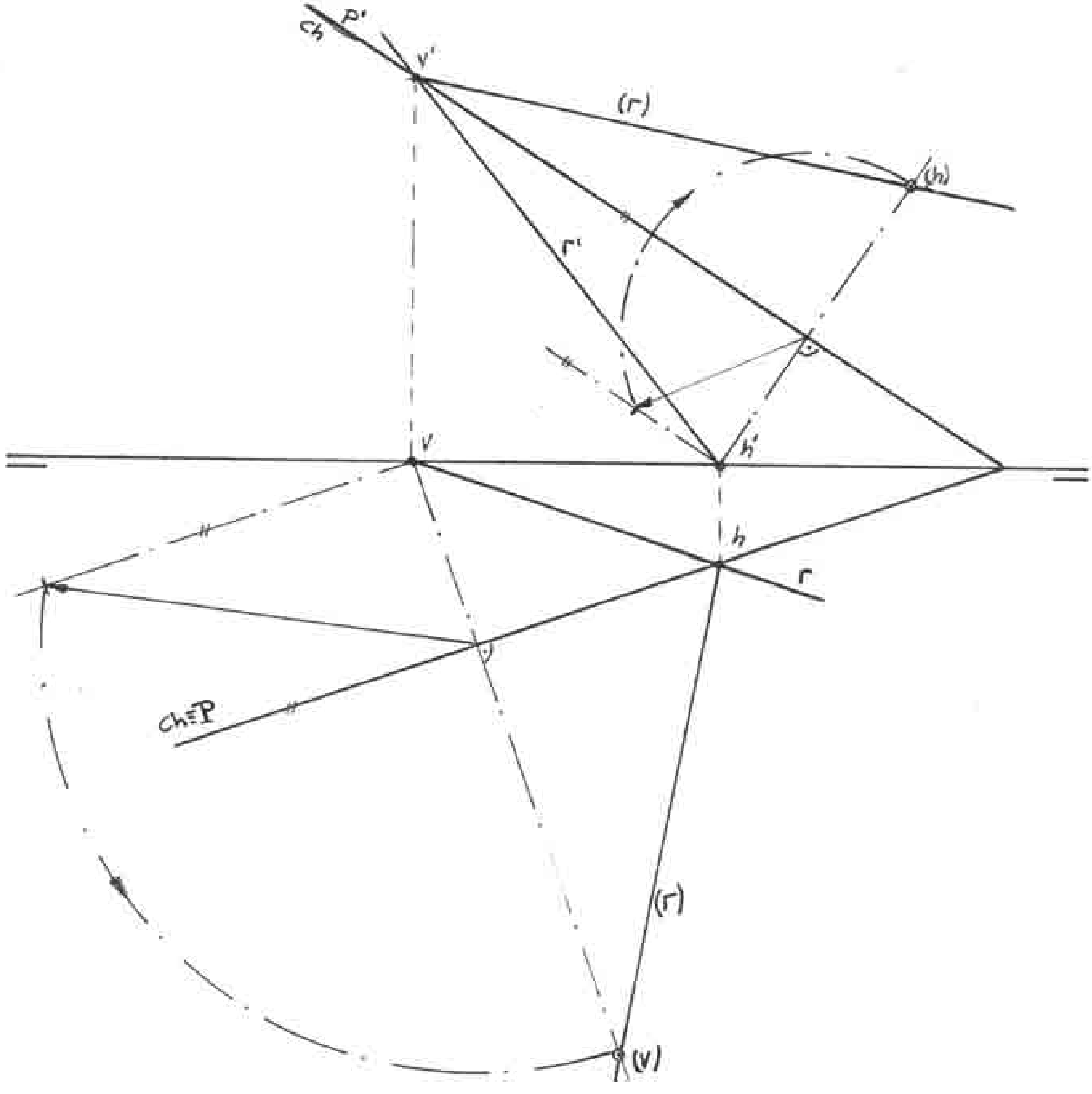


Fig. 95. Abatimiento de una recta.

Abatimiento de una figura plana.

Para abatir una forma plana la regla más simple consiste en abatir, sucesivamente, todos los puntos de la misma.

Si se trata de una forma poligonal se abatirán todos sus vértices y, uniéndolos entre sí, se obtendrá la figura pedida.

Se facilitan las operaciones si se tiene en cuenta que, entre las proyecciones de la figura y su abatida, se establece una homología afín de eje la charnela y de dirección la perpendicular a la charnela.

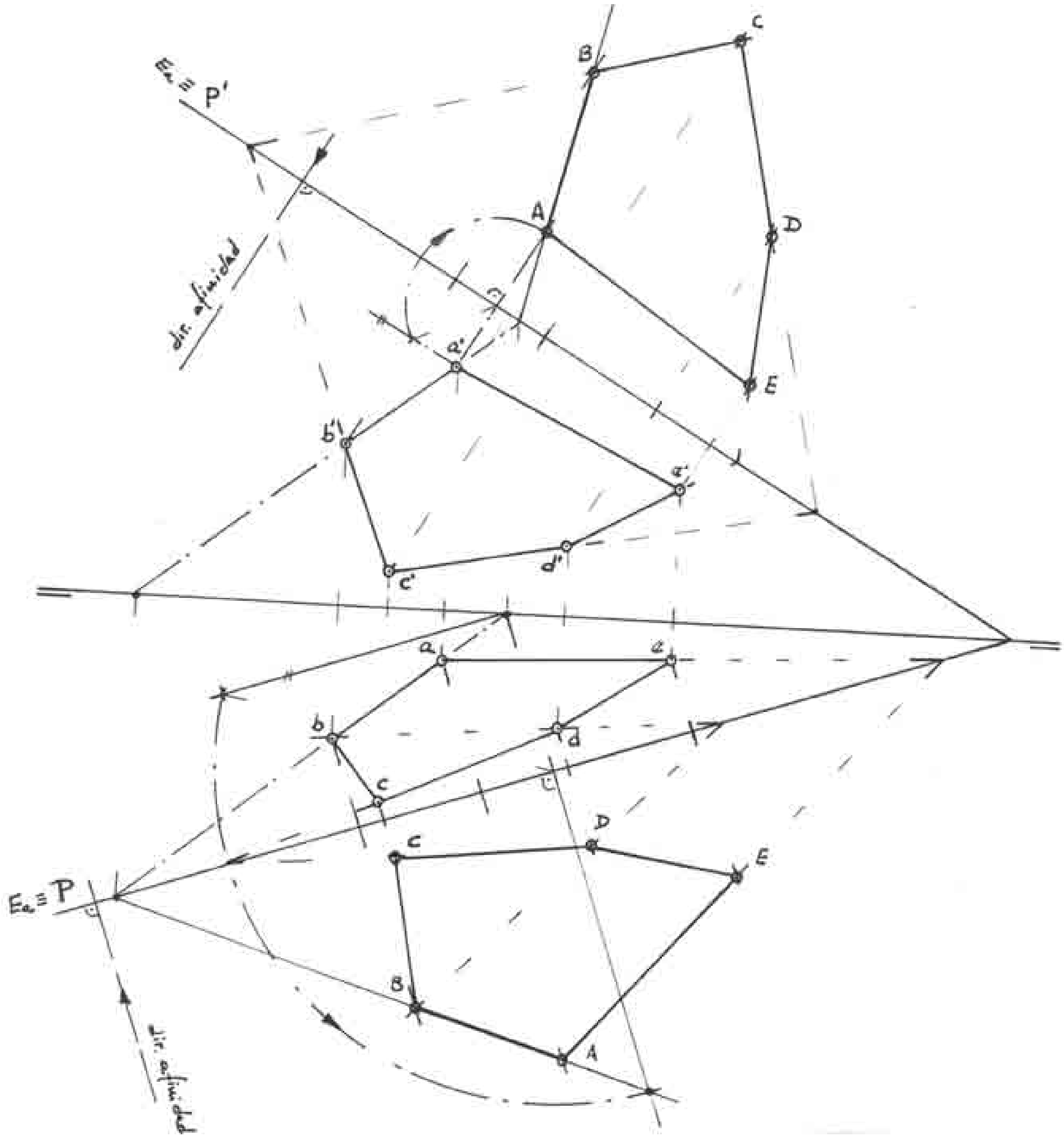


Fig. 96. Abatimiento de una forma plana.

Asimismo, para obtener la proyección vertical una vez conocida la horizontal ó viceversa, conviene tener en cuenta que entre ambas proyecciones se establece tambien una homología afín de eje la intersección del plano Q con el segundo bisector y de dirección perpendicular a la L.T. (fig. 97)

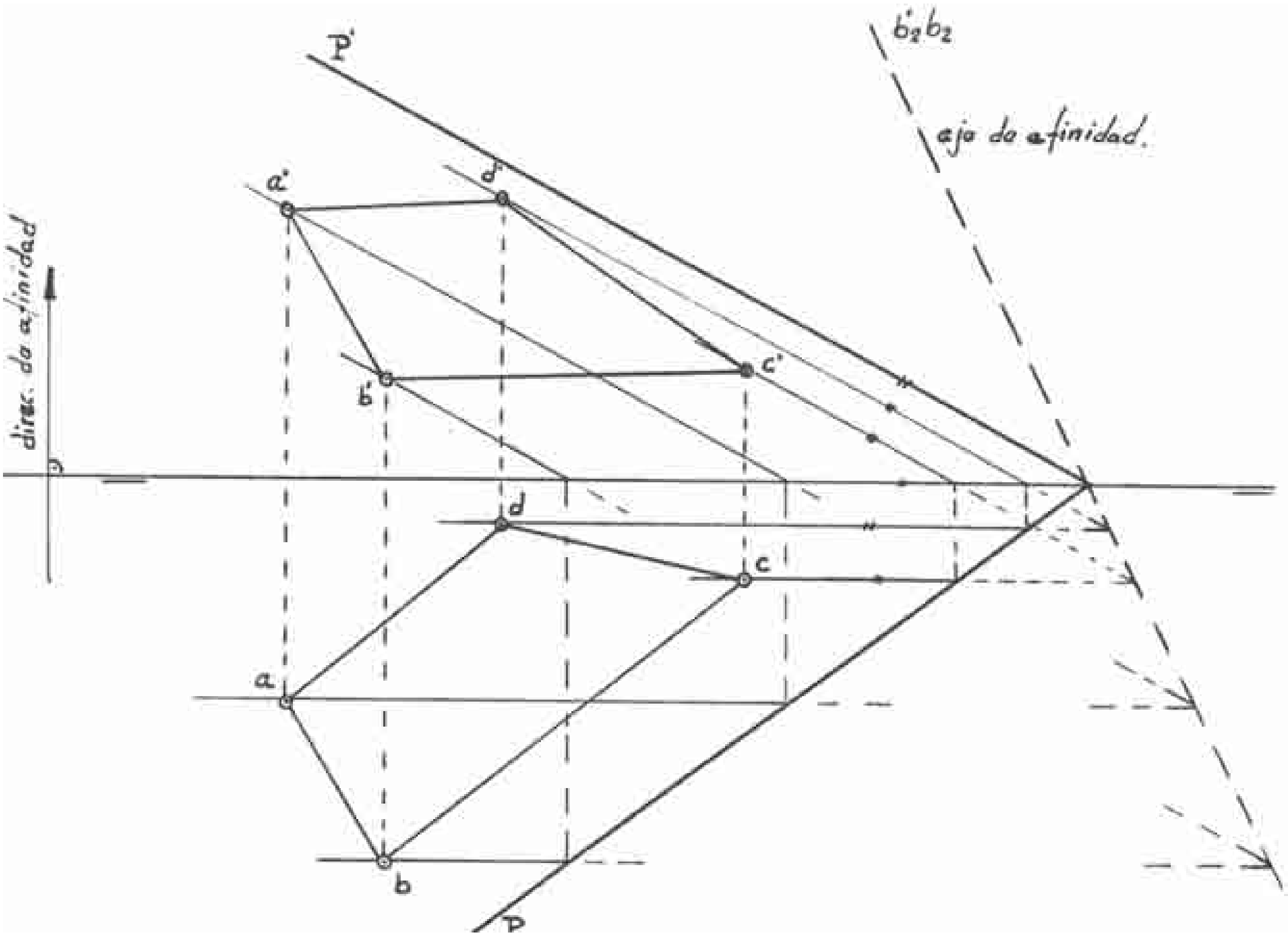


Fig. 97.

Desabatimiento.

Se trata del problema inverso al del abatimiento; es una operación frecuente la que pide colocar, en un plano dado, las proyecciones de una figura plana de forma y dimensiones determinadas.

Obtención de las proyecciones de un polígono.

La fig. 96 permite deducir, con facilidad, las operaciones necesarias para obtener las proyecciones, horizontal y vertical, de la figura plana conocidas su verdadera forma y dimensiones.

Obtención de las proyecciones de una circunferencia.

Por tratarse de un problema frecuente, se van a hallar las proyecciones de una circunferencia de la que se conocen el plano que la contiene, su centro y su radio.

Previamente tendremos en cuenta que

La proyección ortogonal, sobre un plano **H**, de una circunferencia situada en un plano α es una elipse

-cuyo centro O_1 es la proyección del centro O de la circunferencia.

-sus ejes son las proyecciones de dos diámetros, perpendiculares entre sí, de la circunferencia correspondiendo

-El eje mayor A_1B_1 a la proyección del diámetro AB, paralelo al plano de proyección H.

-El eje menor C_1D_1 a la proyección del diámetro CD, perpendicular a la recta de intersección de ambos planos.

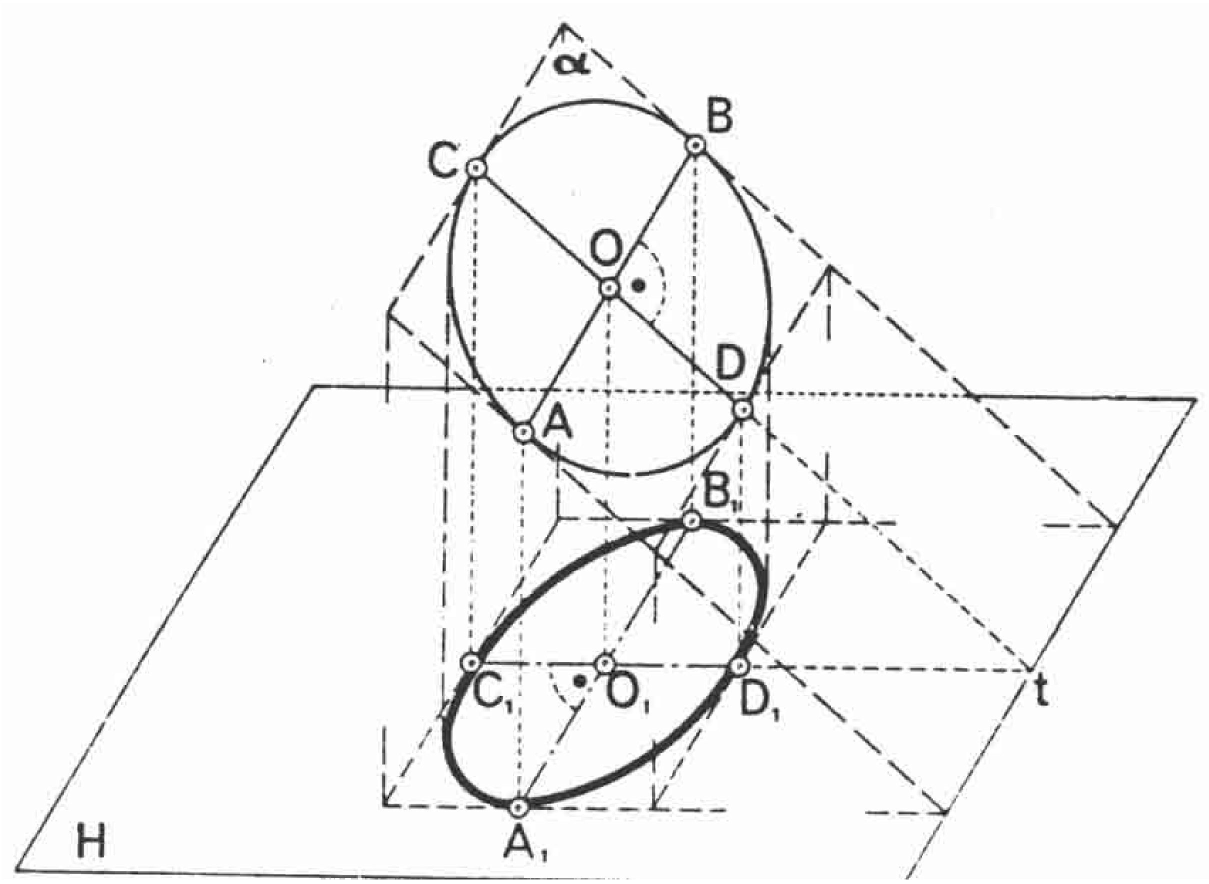


Fig. 98. Proyección de una circunferencia sobre un plano.

En el ejemplo de la fig. 99 se trata de una circunferencia de centro C, tangente al plano vertical de proyección, que está abatida sobre el horizontal.

-Proyección sobre el horizontal.

Será una elipse cuyos ejes serán las proyecciones de dos diámetros de la circunferencia, perpendiculares entre sí.

-uno paralelo al horizontal de proyección, esto es, a la charnela.

-el otro perpendicular a la charnela, es decir, la recta de máxima pendiente del plano.

-Proyección sobre el vertical.

Será una elipse, dos de cuyos diámetros conjugados serán las proyecciones de los ejes de la elipse obtenida como proyección horizontal de la circunferencia abatida.

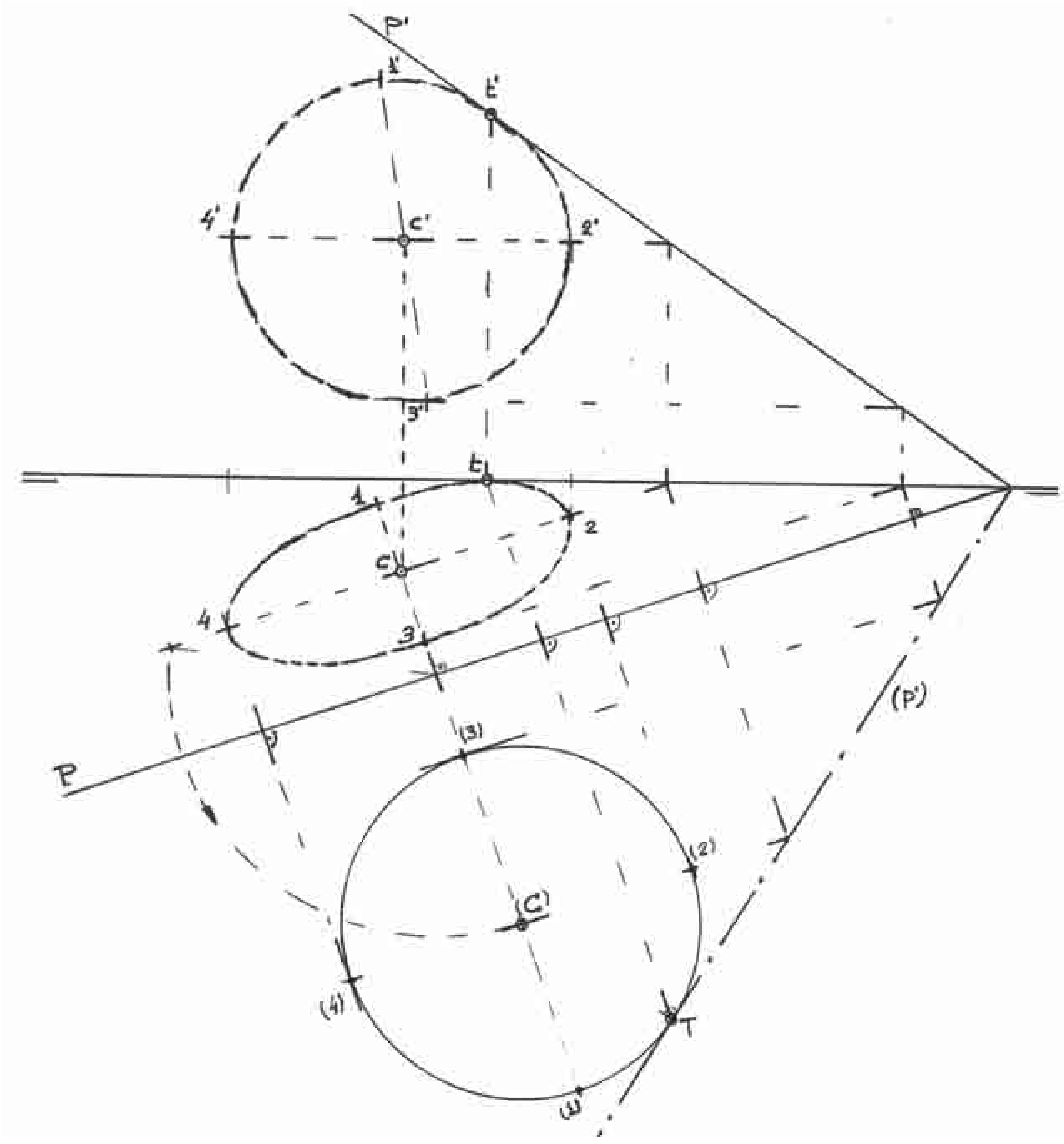
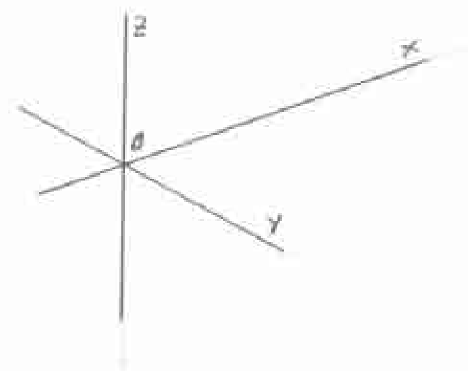
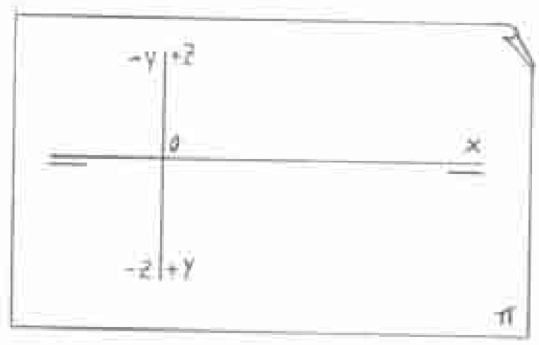


Fig. 99. Desabatimiento de una circunferencia.

Ejercicio.

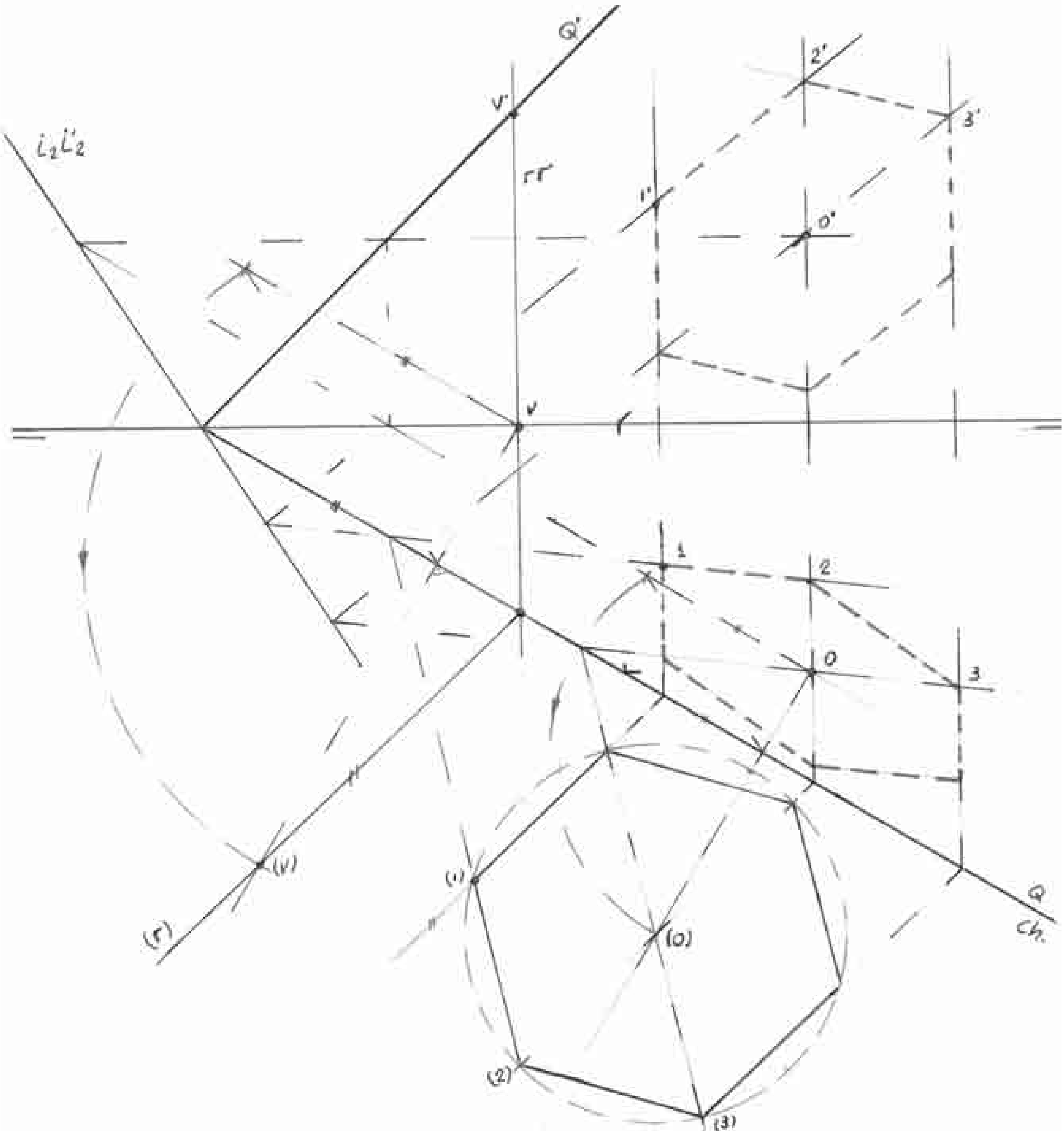
Determinar las proyecciones de un exágono regular, de lado 30, sabiendo que dos de sus lados están situados sobre rectas de perfil; su centro geométrico es un punto de cota 30 y alejamiento 40.
Dicho exágono está situado sobre el plano Q: (0,0,0); (50,30,0); (50,0,50)





Solución.

1. Determinar el plano Q formado por los tres puntos dados.
2. Situar el punto O sobre el plano Q.
3. Situar sobre el plano Q una recta de perfil: recta R.
4. Abatir el plano Q (punto O y recta R).
5. Trazar el exágono con dos de sus lados paralelos a la recta de perfil abatida.
6. Desabatir el exágono y determinar las proyecciones.


Q'
V'
i₂ i'₂
r r'
2'
3'
1'
0'
v
1
2
0
3
(v)
(r)
(1)
(0)
(2)
(3)
Q
Ch.

13. MEDIDA DE ANGULOS.

Angulo de dos rectas.

Pueden darse dos casos.

Angulo de dos rectas que se cortan.

El procedimiento más sencillo consistirá en abatir el plano formado por ambas rectas, lo que permitirá medir el ángulo que forman dichas rectas y trazar su bisectriz

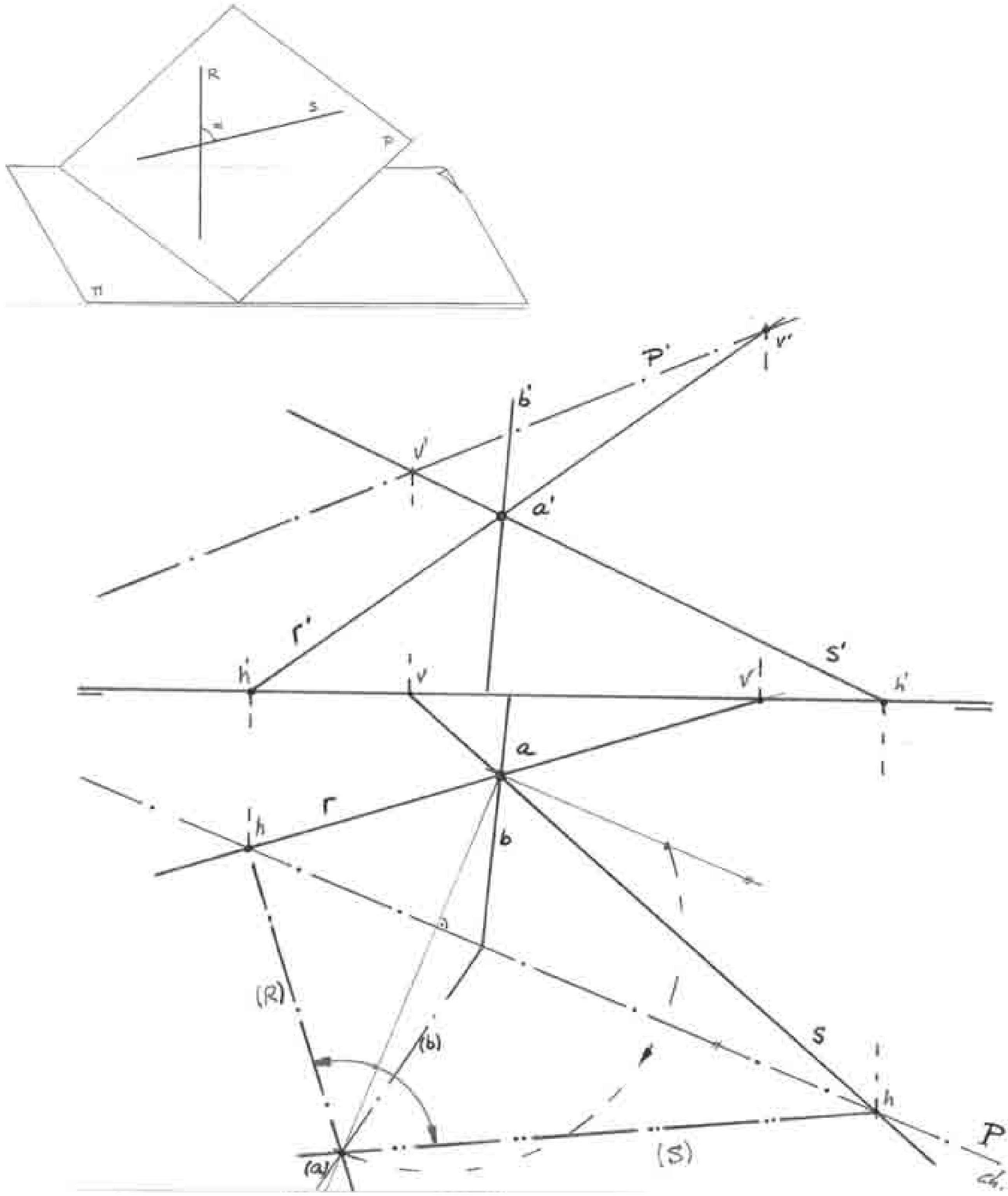


Fig. 100. Angulo de dos rectas que se cortan.

Angulo de dos rectas que se cruzan. (fig. 101)
Se trata de determinar el plano formado por una de las rectas y una paralela a la otra. Abatiendo dicho plano se podrá medir el ángulo buscado.

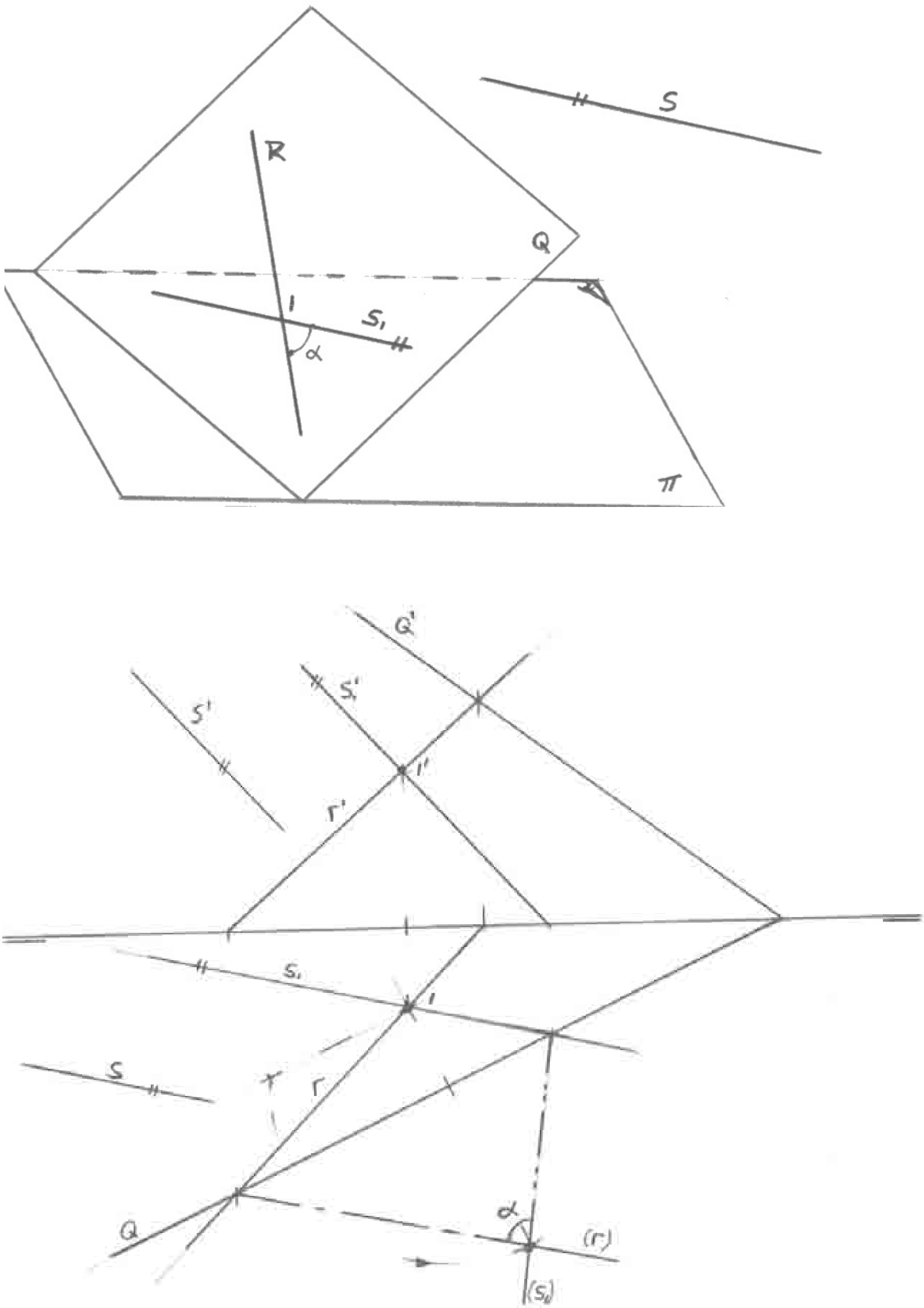


Fig. 101. Angulo de dos rectas que se cruzan.

Angulo de recta y plano.

Será el ángulo formado por la recta dada y su proyección ortogonal sobre el plano dado.

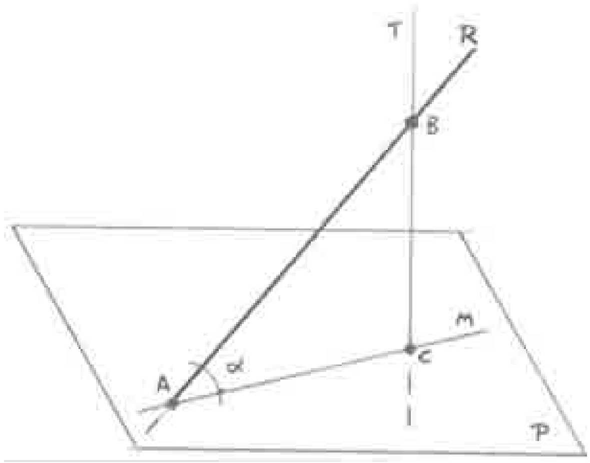


Fig. 102.

Se procederá de la siguiente manera:

1. Se determina el punto A de intersección de la recta R y el plano dado P.
2. Por un punto B de la recta R se traza una recta T perpendicular al plano dado P.
3. Se determina el punto C de intersección de la recta T y el plano dado P.
4. El ángulo buscado será el formado por la recta R y la recta determinada por los puntos A y C.

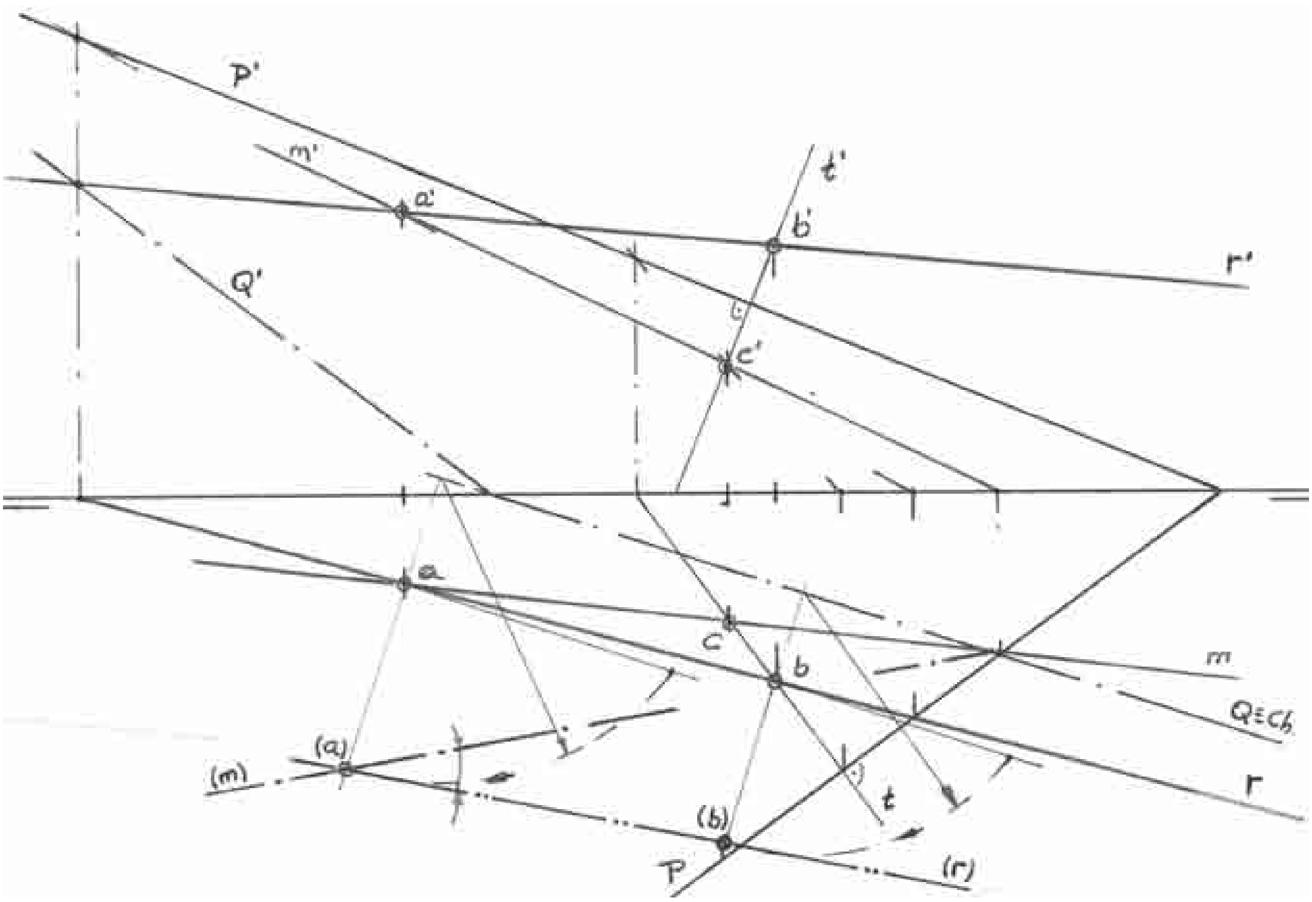


Fig. 103. Angulo de la recta R y el plano P.

Ejercicio.

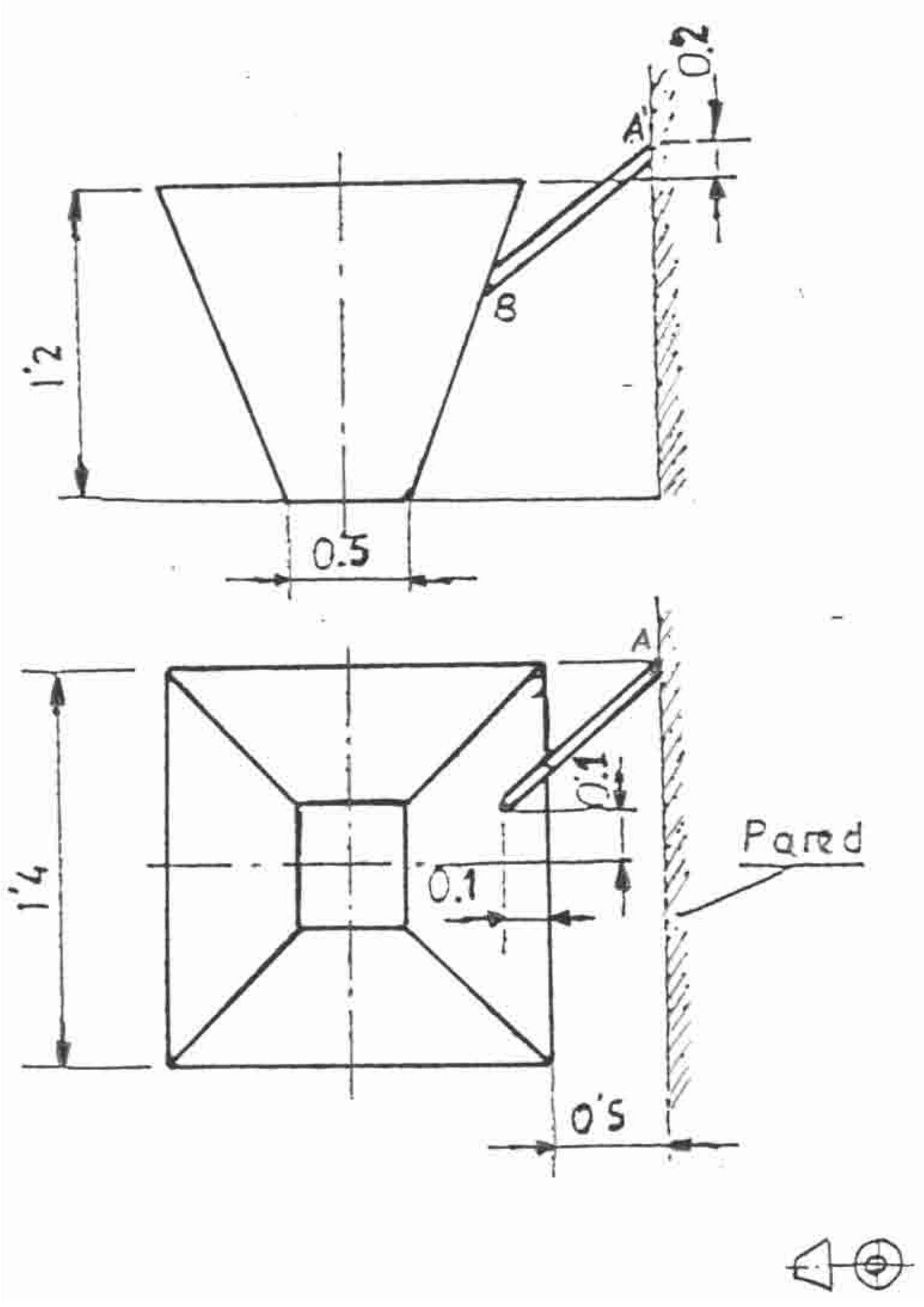
La figura adjunta representa las vistas diédricas de una tolva que es alimentada por un tubo representado por la línea AB.

Determinar:

-la longitud del tubo AB.

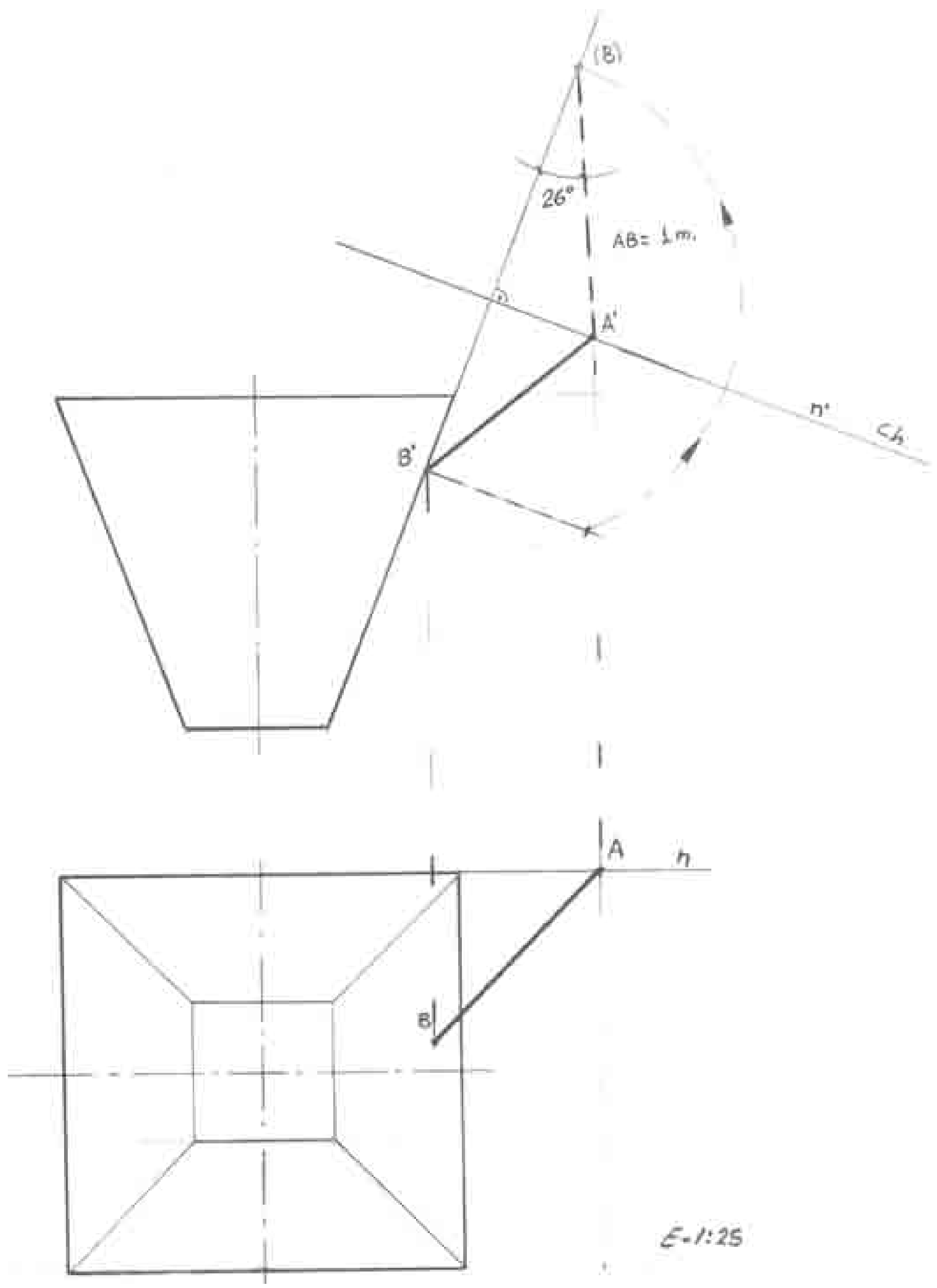
-el ángulo de incidencia del tubo en la tolva.

(cotas en metros)



Solución.

1. Por el punto A se traza una recta perpendicular a la cara de la tolva: recta N.
2. Se abate el plano formado por la recta N y la recta AB.
3. Se mide el ángulo de incidencia y la longitud del tubo AB.

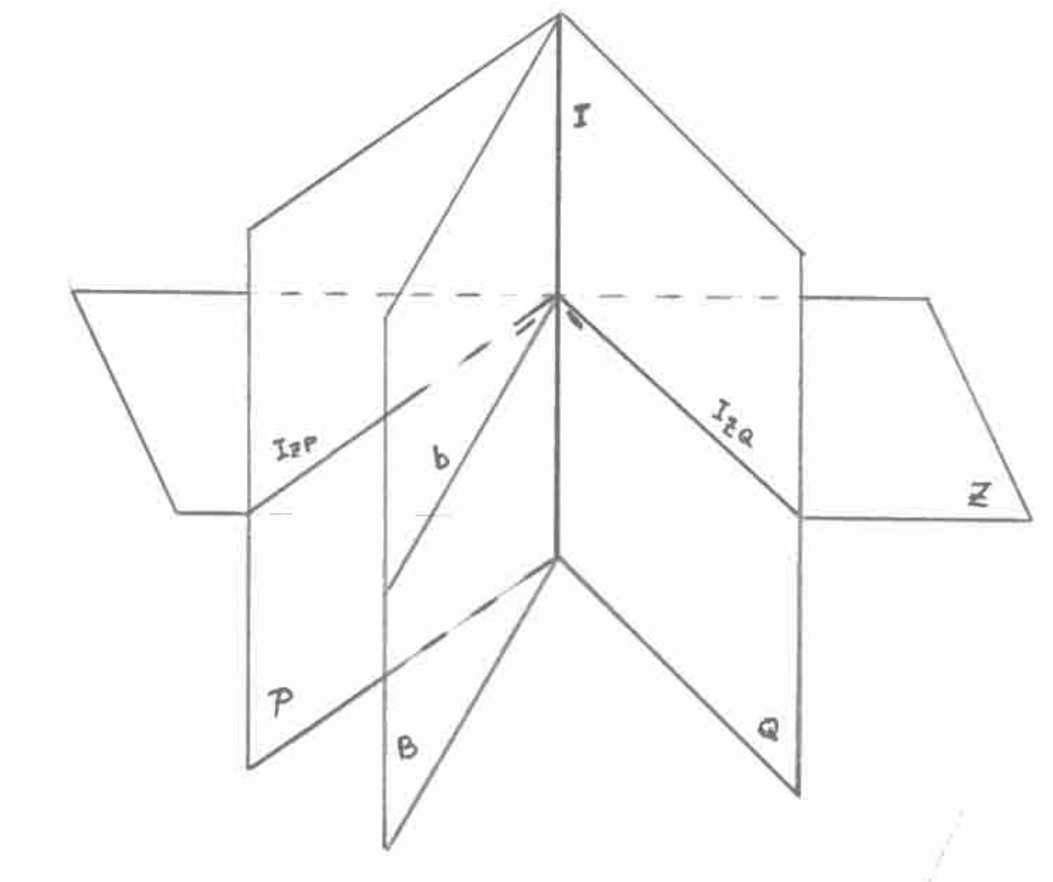


Angulo de dos planos.

El ángulo buscado se denomina ángulo diedro; los planos P y Q serán las caras del diedro; la recta I de intersección de ambos planos se denomina arista del diedro; plano bisector B será el formado por la arista I y la bisectriz b del ángulo diedro.

Para determinar el ángulo diedro se procederá de la siguiente manera:

1. Se determina la recta I de intersección de ambos planos.
2. Se traza un plano perpendicular a la recta I: plano Z.
3. Se determinan las rectas I_{zp} é I_{zq} de intersección del plano Z con los planos P y Q, respectivamente.
4. El ángulo buscado será el formado por las rectas I_{zp} é I_{zq}.



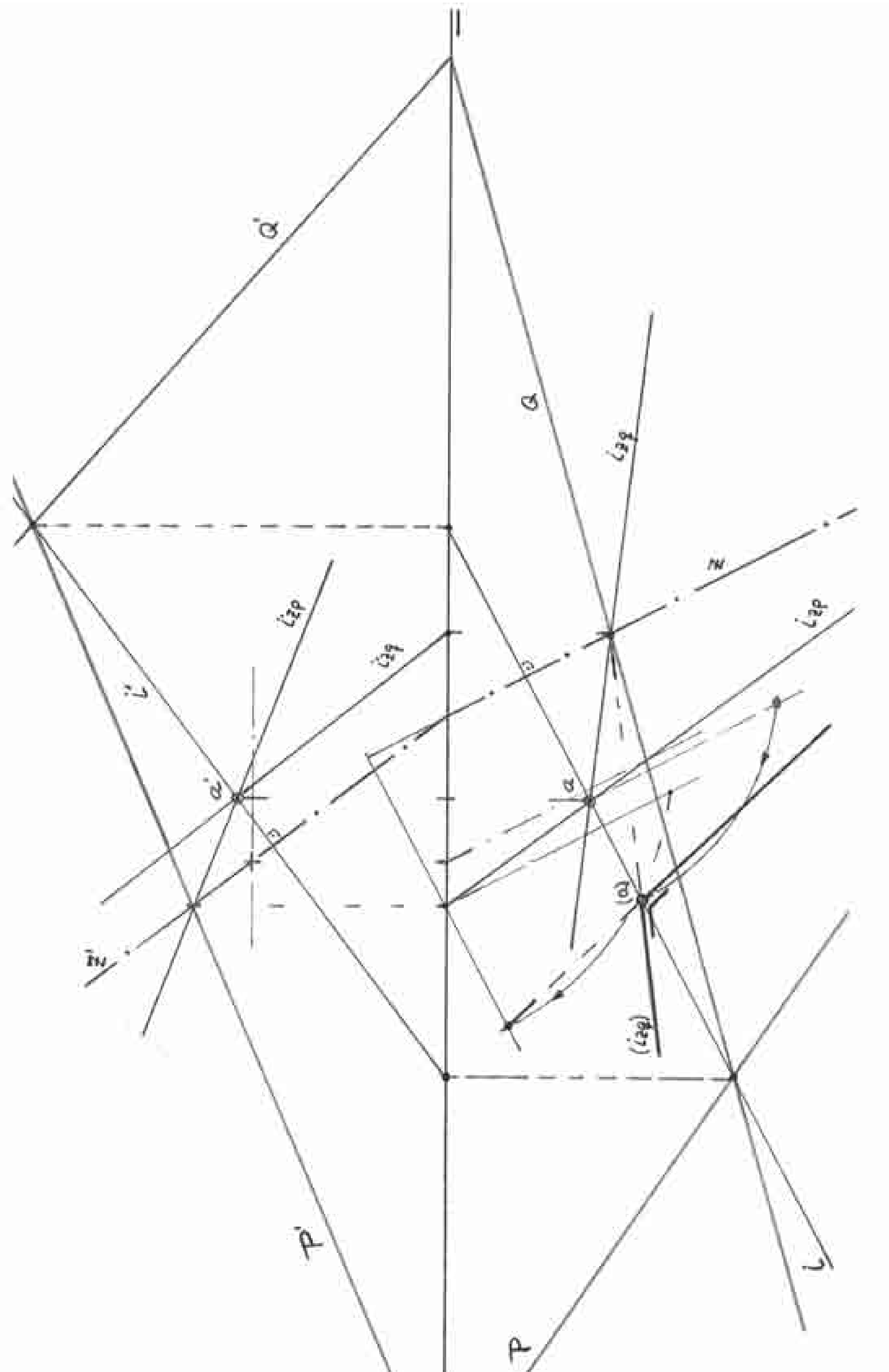


Fig. 104. Angulo que forman dos planos dados P y Q.

14. TRAZADO DE RECTAS Y PLANOS FORMANDO ANGULOS EN CONDICIONES DADAS.

Trazar una recta S que pase por un punto A y corte a la recta R formado un ángulo α.

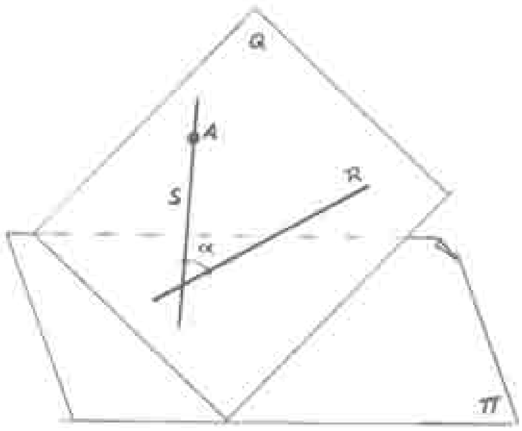
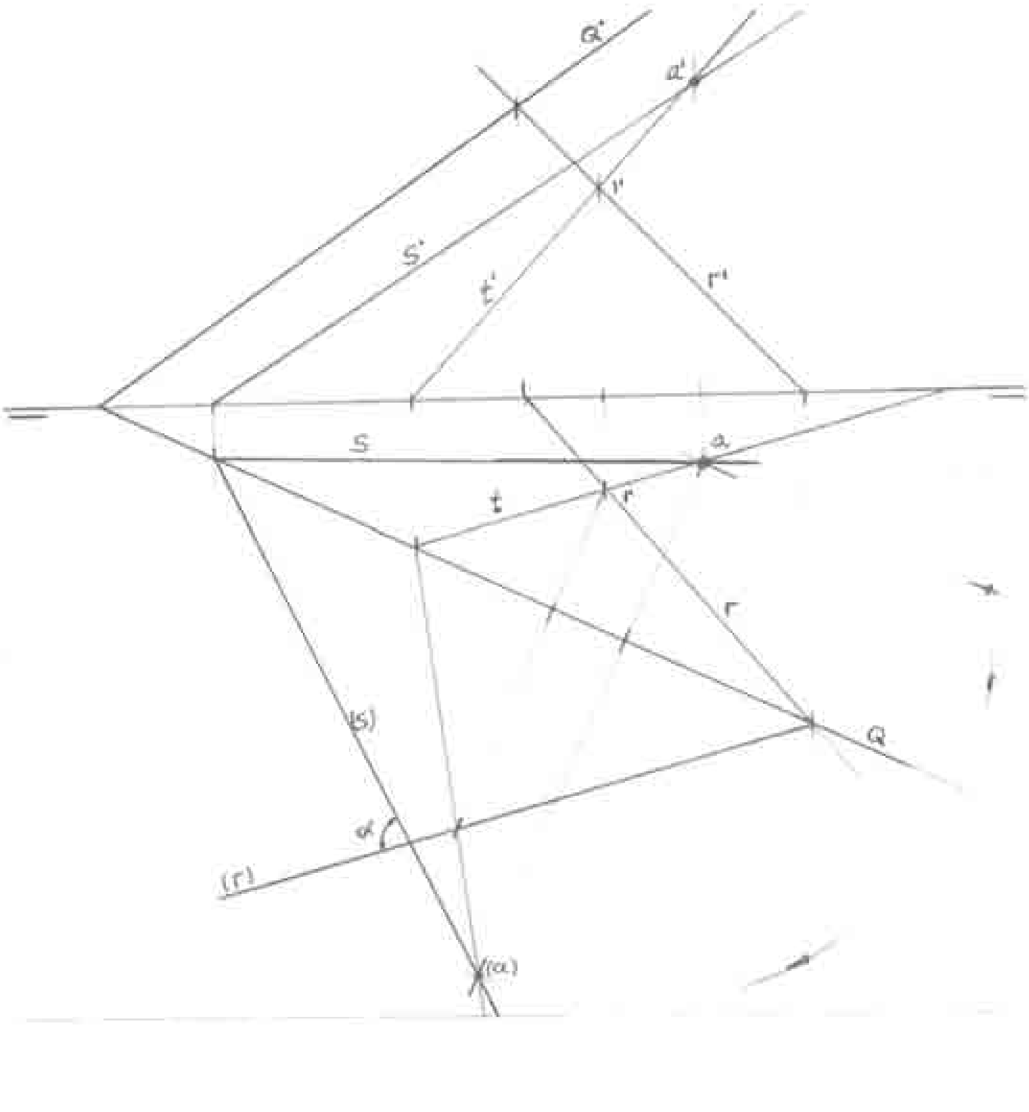


Fig. 105. Recta que pasa por un punto dado A y forma un ángulo α con otra recta dada R.

Se procederá de la siguiente manera:

1. Se determina el plano Q formado por la recta R y el punto A.
2. Se abate el plano Q; se traza la recta S que forme con la recta R el ángulo pedido α.



Trazar, por una recta dada R, un plano Q que forme un ángulo α con otro plano dado P.

El procedimiento a seguir será el siguiente:

1. Se determina el cono de revolución de vértice el punto A, semi-ángulo en el vér-tice: 90-α, y cuya directriz está situada en el plano dado P.
2. Determinar el punto de intersección I de la recta R y el plano P.
3. Por el punto I se traza la tangente T a la circunferencia directriz del cono de re-volución de vértice A.
4. El plano buscado estará formado por la recta R y la tangente T: plano Q.

(puede haber dos, una ó ninguna solución).

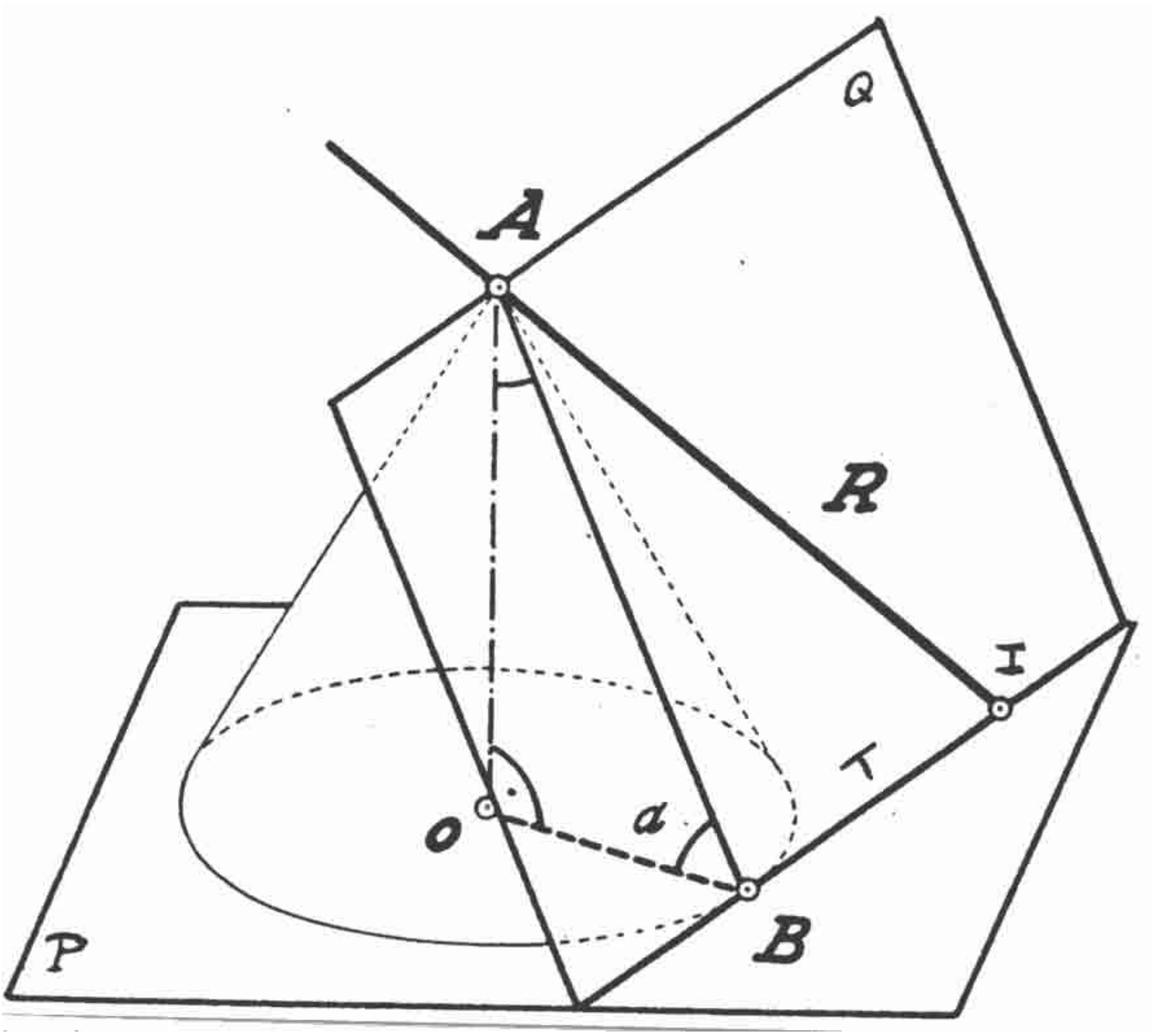
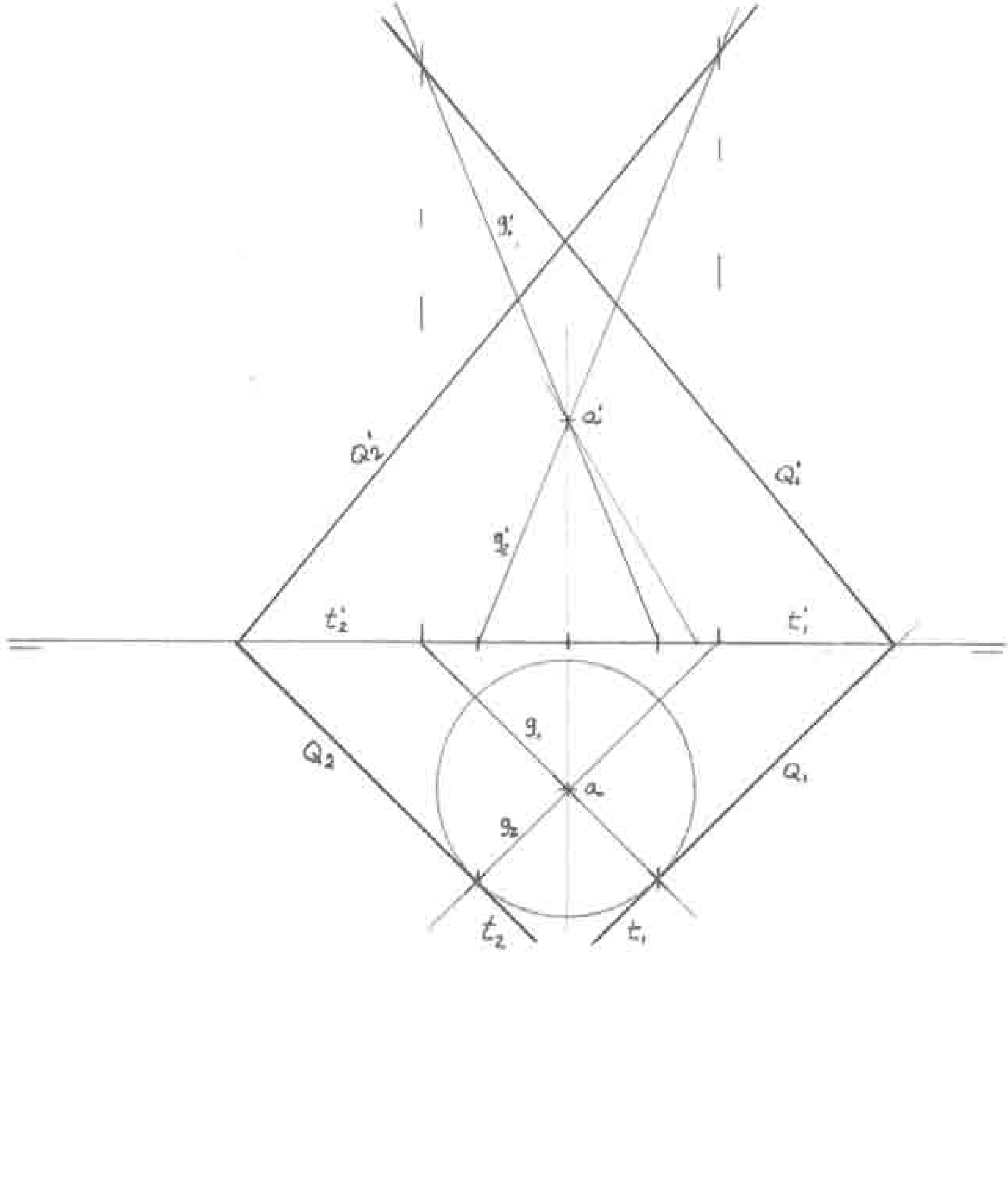


Fig. 106. Plano Q que pasa por una recta dada R y forma un ángulo dado con otro plano P.

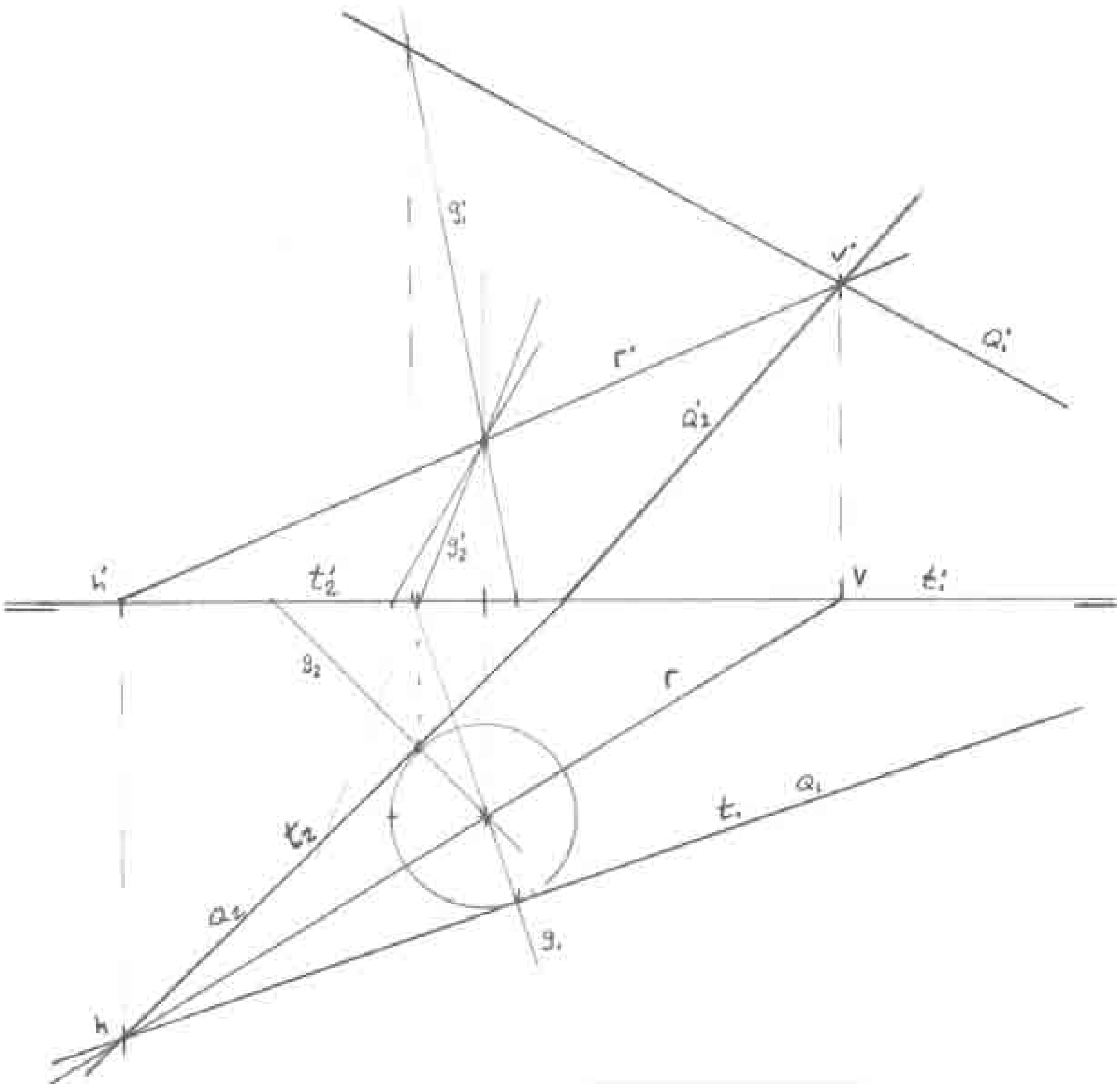
Ejercicio.

Trazar un plano que pase por el punto A(0,20,30), forme 60º con el plano horizontal de proyección y su traza horizontal forme 45º con la L.T.



Ejercicio.

Determinar el plano que pase por la recta R (0,55,0); (90,0,40) y forme 60º con el horizontal de proyección.



Trazar una recta R que pertenezca a un plano Q y forme un ángulo dado α con un plano P.

Se procederá de la siguiente manera:

1. Se determina el cono de revolución de vértice el punto A, semi-ángulo en el vér-tice: 90-α, y cuya directriz está situada en el plano dado P.
2. Se determina la recta de intersección I del plano P y el plano Q.
3. La recta R buscada vendrá definida por el vértice A y el punto de corte de la recta I con la directriz del cono de revolución.

(puede haber dos, una ó ninguna solución)

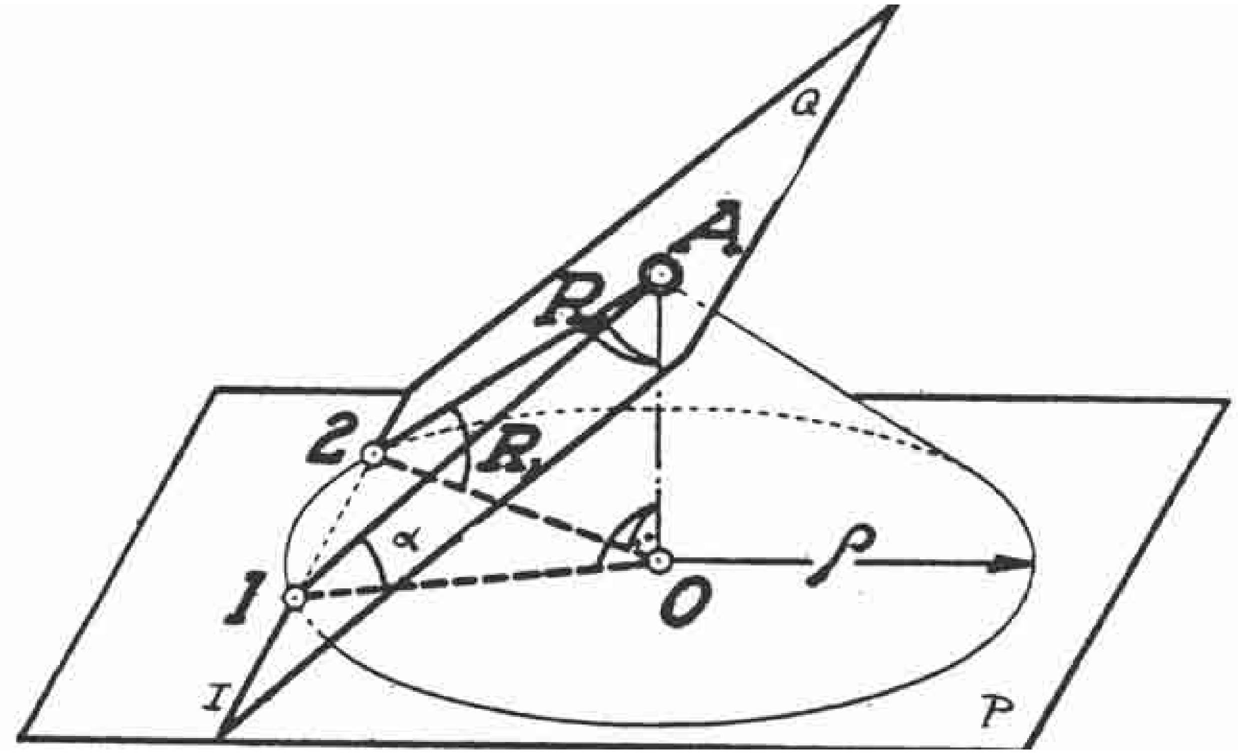


Fig. 107. Recta que pertenece a un plano dado Q y forma un ángulo dado con otro plano P.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Arana Ibarra, L. *Geometría Descriptiva.*

González, M. et alt. *Geometría Descriptiva.*

González, V. et alt. *Geometría Descriptiva.* Ed. Texgraf.

Izquierdo Asensi, F. *Geometría Descriptiva.* Ed. Dossat.

Leighton Wellman, B. *Geometría Descriptiva.* Ed. Reverté.

Taibo Fernández, A. *Geometría Descriptiva y sus aplicaciones.* Ed. Tebar Flores.

Zubiaurre, E. *Dibujo Técnico y Geometría Descriptiva.*