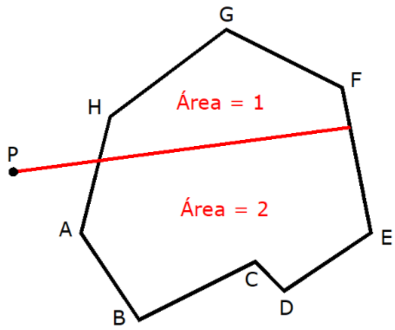
# *División de polígono*

***Dado un polígono, un punto fijo y una razón, trazar una recta que pasando por el punto corte al polígono en dos polígonos cuya relación de áreas sea la razón dada.***



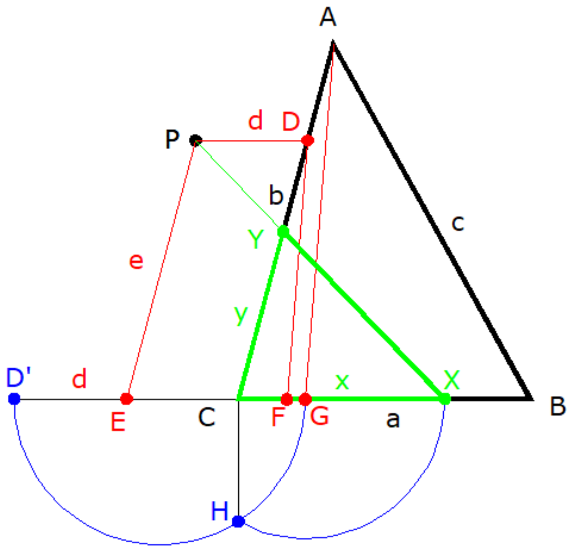

***En la figura del ejemplo, un octógono cóncavo, el punto exterior y la razón de áreas 1 : 2***

**Solución:**

Para la partición gráfica del polígono nos ayudamos de la división del triángulo por una recta desde un punto exterior, dado que esta división, aplicando las tangentes a una hipérbola, es algo laborioso, optamos por calcular analíticamente el punto de corte de la recta a uno de los lados del triángulo, y de la solución deducimos un trazado con regla y compás. Por lo tanto, en los polígonos, procederemos a la “triangulación” para poder aplicar este trazado.

La recta al cortar el triángulo necesariamente determinará un triángulo y un cuadrilátero salvo que la recta pasar por un vértice, en este caso determinaría dos triángulos.

Si “k” es la razón de áreas deseadas entre un triángulo dado ABC y el triángulo resultante del corte CXY, por áreas se cumplirá:




$$xy = kab$$

Y por proporcionalidad de triángulos:

$$\frac{y}{x} = \frac{e}{x+d}$$

Resolvemos el sistema de ambas relaciones, solución que fácilmente podemos escribir como:

$$x = \frac{kab}{2e} + \sqrt{\frac{kab}{2e}\left(\frac{kab}{2e} + 2d\right)}$$

Función que “traducimos” a regla y compás, para determinar el punto de corte.

Por P trazamos paralelas a los lados del triángulo, “d” y “e” que determinan los puntos D y E

Sobre el lado “a” situamos un punto “F” tal que CF = ka/2

Unimos D con F, por A trazamos una paralela a DF que determina G, entonces CG por Tales es

$$CG = \frac{kab}{2e}$$

Sobre la prolongación de “a” situamos un punto D’ tal que D’E = d

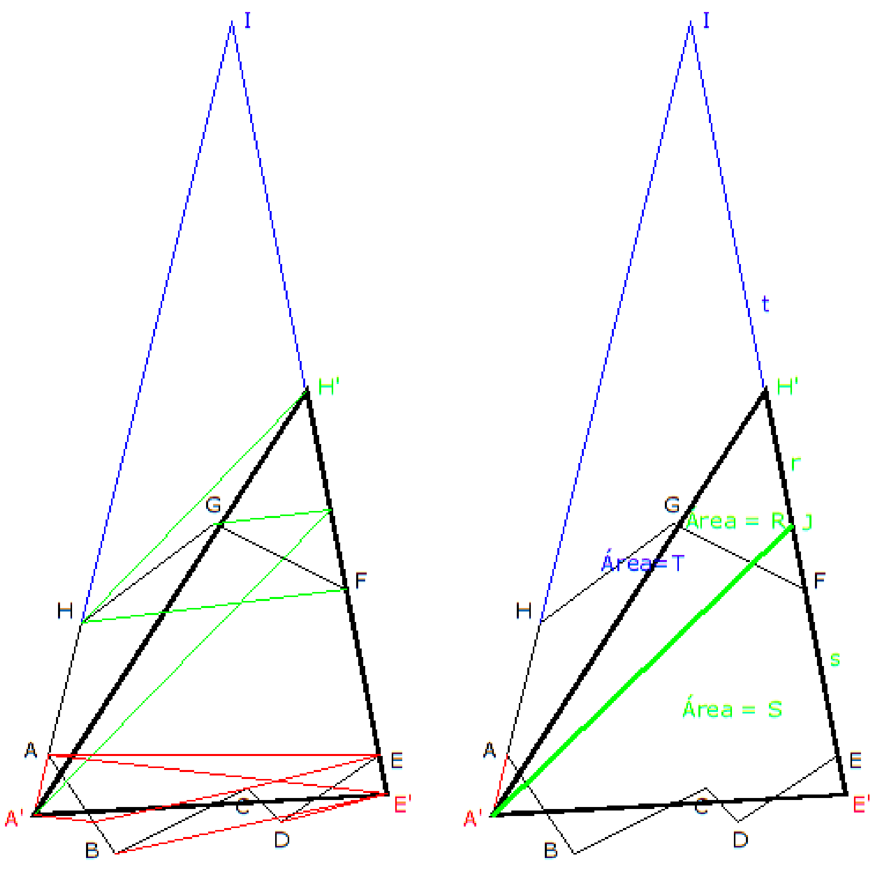
Trazamos un semicírculo de diámetro D’G, por C una perpendicular al lado determina H sobre el semicírculo, entonces GH por teorema del cateto es

$$GH = \sqrt{\frac{kab}{2e}\left(\frac{kab}{2e} + 2d\right)}$$

Por lo tanto, haciendo GX = GH conseguimos el punto X por donde pasa la recta.

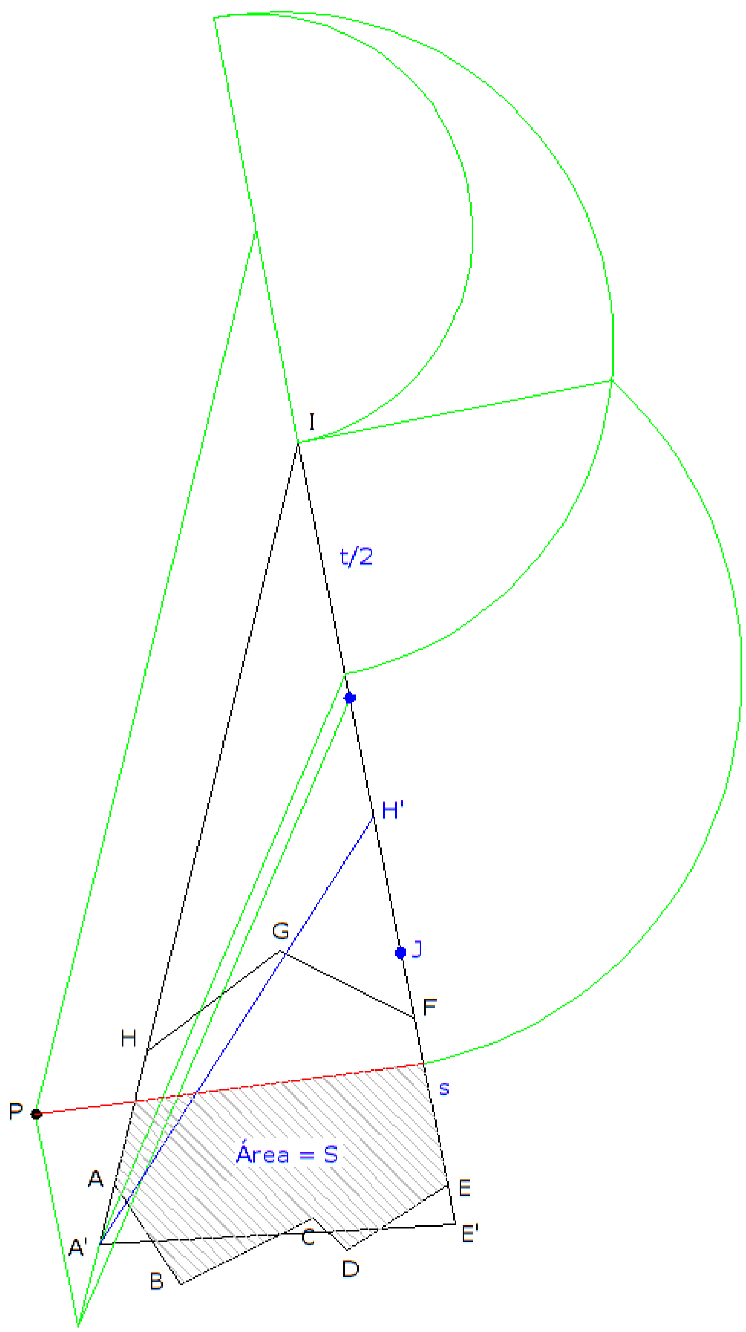
Para aplicarlo a los polígonos nos valemos de un triángulo auxiliar que comparamos con el resultante de la triangulación del polígono. El método tiene sus pros y sus contras. Por una parte, es conveniente conocer los lados por los que pasa la recta de división, en caso contrario deberemos repetir la construcción con otros lados hasta que el trazado sea posible. Estos lados supuestos de corte han de ser dos, en algunos polígonos cóncavos los lados de corte son más de dos, por lo tanto, no es aplicable. También existen algunos casos particulares que el trazado es más sencillo por otros sistemas.

Prolongamos en ambos sentidos los dos lados, supuestos, que cortara la recta, en caso de ser paralelos se simplifica el problema por otros métodos.




Sobre la prolongación de los lados, triangulamos el polígono (la parte inferior de rojo, la superior de verde), de forma que el triángulo resultante A’E’H’ tenga su base y un ángulo común con el triángulo A’E’I que forman las prolongaciones

En el gráfico, fácilmente vemos que, si deseamos dividir el triángulo A’E’H’ en dos partes de áreas R y S, basta dividir el lado




E’H’ por el punto J en dos partes “r” (H’J) y “s” (E’J) proporcionales a R y S. La recta A’J dividirá el triángulo de la forma deseada.

Esta recta A’J divide al triángulo A’E’I en dos partes de áreas S y T desconocidas, pero proporcionales a los segmentos “s” (E’J) y “t” (IJ), conocidos.

Entonces al ***dividir el triángulo A’E’I en partes proporcionales a “s” y “t” desde el punto P***, al ser J común, la parte de área S será común al triángulo y al polígono, ***el polígono quedará dividido en partes proporcionales a “r” y “s”.***

En el gráfico la división del triángulo, anteriormente justificada, a este triángulo auxiliar.

*Seroig*