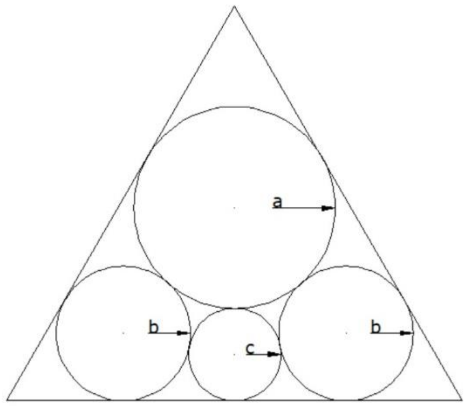
## *4 círculos tangentes inscritos en un triángulo equilátero*

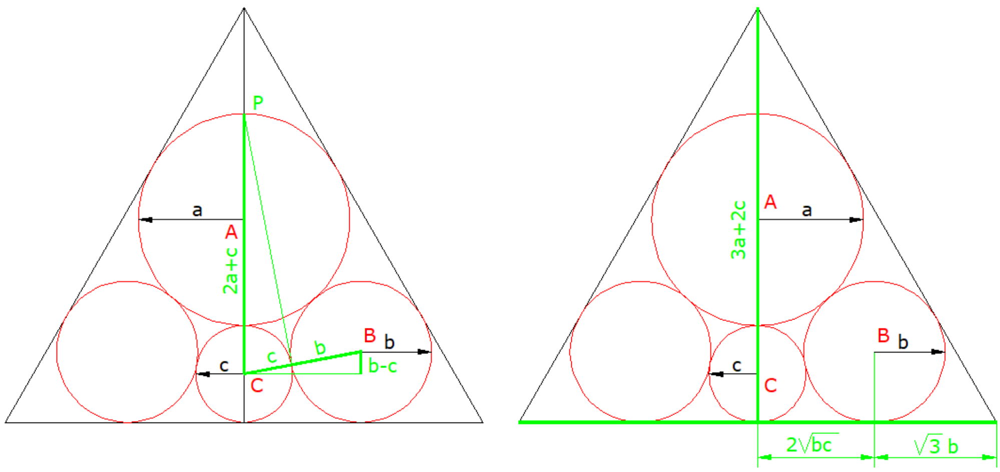
*Calcular los tres radios de los cuatro círculos tangentes inscritos en un triángulo equilátero según el grafico*




### *Solución*

De la primera figura, por los triángulos rectángulos formados, por el eje radical como hipotenusa por una parte, y los radios “b” y “c” por otra, fácilmente llegamos a la ecuación (1).

De la segunda por la relación entre base y altura del triángulo equilátero podemos escribir la ecuación (2)




$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad ab = ac + c^2 \\ &(2)\quad 3b + 2\sqrt{3bc} = 3a + 2c \end{aligned}\right\|$$

Si intentamos resolver este sistema, de forma “clásica”, nos conducirá a una ecuación de 4º grado que será algo complicado resolver a mano, pero haciendo:

$$\left.\begin{aligned} ac - ab + c^2 &= 0 \\ (3a - 3b + 2c)^2 &= 12bc \end{aligned}\right\|$$

$$\left.\begin{aligned} &(3)\quad ac - ab + c^2 = 0 \\ &(4)\quad 9a^2 - 18ab + 12ac + 9b^2 - 24bc + 4c^2 = 0 \end{aligned}\right\|$$

Efectuando la combinación lineal *(4)-36*(3)* tenemos:

$$9a^2 - 18ab + 12ac + 9b^2 - 24bc + 4c^2 - 36(ac - ab + c^2) = 0$$

Que podemos escribir de la forma,

$$9(a+b)^2 - 24c(a+b) - 32c^2 = 0$$

Una simple ecuación de 2º grado, de soluciones

$$(5) \quad a+b = \frac{4}{3}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)c$$

Resolviendo el sistema de, la solución positiva de (5) y la relación (1)

$$\left.\begin{array}{c} ab = ac + c^2 \\ a+b = \dfrac{4}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)c \end{array}\right\|$$

Resulta otra ecuación de 2º grado

$$a^2 - \left(1 + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)ca + c^2 = 0$$

De tal forma conseguimos los radios “a” y “b” en función de “c”

$$a = \frac{1}{6}\left(1 + 4\sqrt{3} + \sqrt{13 + 8\sqrt{3}}\right)c, \quad b = \frac{1}{6}\left(7 + 4\sqrt{3} - \sqrt{13 + 8\sqrt{3}}\right)c$$

Si deseamos los radios en función del lado “l” del triángulo, basta considerar

$$2c + 3a = \frac{1}{2}\sqrt{3}l$$

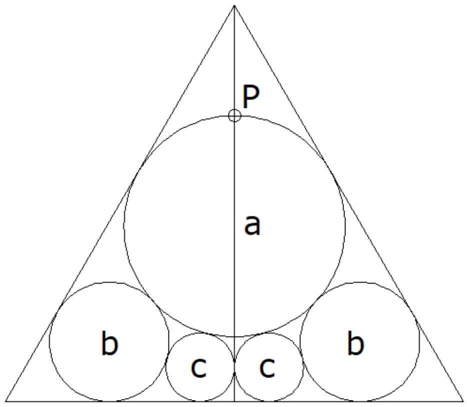
## *Solución gráfica*

Si deseamos un trazado geométrico, existen múltiples formas, pero haciendo:

$$\begin{array}{c} a = 1 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 * 4\sqrt{3}} \\ b = 7 + 4\sqrt{3} - \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 * 4\sqrt{3}} \\ c = 6 \end{array}$$

simplemente con Pitágoras y teorema de la altura lo conseguimos.

## *5 círculos tangentes inscritos en un triángulo equilátero*




*Calcular los tres radios de los cinco círculos tangentes inscritos en un triángulo equilátero según el grafico*

### *Solución*

En este caso las ecuaciones de relación de radios, son la (6) y (7), la (8) es una simplificación de la (6)

$$(6) \quad \frac{a+\sqrt{a^2+2ac}+c}{c+\sqrt{bc}}=\frac{2\sqrt{bc}}{b-c}$$

$$(7) \quad 2a+\sqrt{a^2+2ac}+c=\sqrt{3}\left(c+2\sqrt{bc}+\sqrt{3}b\right)$$

$$(8) \quad 4a\left(b-\sqrt{bc}\right)=c\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$$

Con estas ecuaciones no he encontrado forma “brillante” de resolver el sistema, y creo que deberé rendirme, pues WolframAlpha se toma su tiempo para hallar la solución.

$$a=\frac{1}{8}\left(-1+8\sqrt{3}+\sqrt{81+48\sqrt{3}}\right)c$$

$$b=\frac{1}{24}\left(15+8\sqrt{3}+\sqrt{81+48\sqrt{3}}\right)c$$

De estas soluciones se deduce esta curiosidad:

$$a+2c=3b$$

Si deseamos hacer uso de compas y regla podemos escribirlas de esta forma:

$$a=3\left(-1+8\sqrt{3}+\sqrt{9^2+6*8\sqrt{3}}\right)$$

$$b=15+8\sqrt{3}+\sqrt{9^2+6*8\sqrt{3}}$$

$$c=24$$

*Seroig*